con información perfecta se compone sólo de jugadas personales, al emplear cada parte su estrategia óptima ésta siempre tendrá que acabarse en un término enteramente definido, con una ganancia exactamente igual al valor del juego.

En calidad de juego con información perfecta citaremos el tan conocido en el que se colocan monedas en una mesa redonda. Dos jugadores colocan alternativamente monedas iguales en una mesa redonda, eligiendo cada vez cualquier lugar para el centro de la moneda. No se permite que una moneda tape a otra ni siquiera parcialmente. Gana el jugador que coloque la última moneda cuando ya no haya sitio para otra más. Es evidente que el final de este juego siempre está decidido de antemano y que existe una estrategia completamente determinada que asegura una victoria cierta al jugador que coloque la primera moneda. Precisamente la primera moneda debe colocarse en el centro de la mesa y a continuación contestar a cada jugada del adversario con una jugada simétrica. En este caso el segundo jugador puede comportarse de cualquier manera y no cambiará el resultado predeterminado del juego. Por eso este juego sólo tiene sentido para los jugadores que no conocen la estrategia óptima. Una cosa semejante ocurre con el ajedrez y otros juegos de información perfecta; cualquiera de estos juegos tiene punto de silla y solución que le indica a cada uno de los jugadores su estrategia óptima; la solución del juego de ajedrez no ha sido encontrada exclusivamente porque el número de combinaciones de las jugadas posibles es en el ajedrez demasiado grande para que se pueda construir la matriz de pagos y encontrar en ella el punto de silla.

§ 3. ESTRATEGIAS PURAS Y MIXTAS. SOLUCIÓN DE JUEGOS CON ESTRATEGIAS MIXTAS

Entre los juegos finitos que tienen importancia práctica es relativamente raro encontrar juegos con punto de silla. Es más típico el caso cuando los valores inferior y superior del juego son diferentes. Analizando las matrices de tales juegos llegamos a la conclusión de que si a cada jugador se le presenta la posibilidad de elección de una sola estrategia, esta elección, calculando que tenemos un adversario que actúa razonablemente, debe determinarse por el principio del mín-máx. Ateniéndonos a nuestra estrategia máx-min, con cualquier conducta del adversario nos aseguramos con anticipación una ganancia igual al valor inferior del juego α. Surge una pregunta natural: ¿es posible asegurarse una ganancia media mayor que α si se emplea no una sola estrategia "pura", sino que se alternan en forma casual varias estrategias?

Tales estrategias combinadas, que consisten en el empleo de varias estrategias puras que alternan por una ley aleatoria con una determinada relación de frecuencias, en la teoría de los juegos se llaman *estrategias mixtas.*

Es evidente que cada estrategia pura es un caso particular de la mixta, en la cual todas las estrategias menos una se emplean con frecuencia cero y la dada, con frecuencia 1.

Resulta que al emplear no sólo estrategias puras, sino también mixtas, se puede obtener para cada juego finito una solución, o sea un par de estrategias (por lo general mixtas) tales que al ser empleadas por los dos jugadores originarán una ganancia igual al valor del juego; además, con cualquier desviación de la estrategia óptima por un jugador la ganancia sólo puede cambiar desfavorablemente para el que se desvió.

La afirmación enunciada es el contenido del llamado *teorema básico de la teoría de los juegos.* Este teorema lo demostró por primera vez John Neumann en el año 1928. Las demostraciones conocidas de este teorema son relativamente complicadas, y por lo tanto aquí sólo citaremos su enunciado.

Cada juego finito tiene, por lo menos, una solución (posiblemente en el campo de las estrategias mixtas).

La ganancia que se obtiene como fruto de la solución se llama valor del juego. Del teorema básico se deduce que cada juego finito tiene un valor. Es evidente que el valor del juego v siempre se encuentra entre los valores inferior α y superior β del juego:

$$\alpha \leqslant v \leqslant \beta \tag{3.1}$$

Efectivamente, α es la máxima ganancia garantizada que nos podemos asegurar empleando sólo nuestras estrategias puras. Ya que las estrategias mixtas incluyen como caso particular también todas las puras, entonces admitiendo las estrategias mixtas, además de las puras, en cualquier caso no empeoramos nuestras posibilidades y por consiguiente

$$\nu \geqslant \alpha$$

Examinando en forma análoga las posibilidades del adversario, mostraremos que

$$\nu \leqslant \beta$$

de lo que se deduce la desigualdad (3.1) a demostrar.

Introduciremos designaciones especiales para las estrategias mixtas. Si, por ejemplo, nuestra estrategia mixta consiste en el empleo de las estrategias A_1, A_2, A_3, con las frecuencias p_1, p_2, p_3 (teniendo en cuenta que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$) designaremos esta estrategia así:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, a la estrategia mixta del adversario la designaremos:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

donde q_1, q_2, q_3 son las frecuencias con las que se mezclan las estrategias B_1, B_2, B_3; $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Supongamos que hemos encontrado la solución del juego que consiste de dos estrategias óptimas mixtas S_A^*, S_B^*. En el caso general, no todas las estrategias puras accesibles a cada jugador entran en su estrategia óptima mixta, sino sólo algunas. Llamaremos a las estrategias que entran en la estrategia óptima mixta del jugador sus estrategias "útiles".

Resulta que la solución del juego goza de una notable propiedad más: *si uno de los jugadores se atiene a su estrategia óptima mixta* S_A^* (S_B^*), *la ganancia queda inalterable e igual al valor del juego* ν, *independientemente de lo que haga el otro jugador, a menos que él salga de los límites de sus estrategias "útiles"*. Puede, por ejemplo, emplear cualquiera de sus estrategias "útiles" en forma pura o también mezclarlas en cualquier proporción.

Demostremos esta afirmación. Supongamos que exista la solución S_A^*, S_B^* del juego $m \times n$. Concretando, consideremos que la estrategia óptima mixta S_A^* consta de una mezcla de tres estrategias "útiles" A_1, A_2, A_3; S_B^* consta respectivamente de una mezcla de tres estrategias "útiles" B_1, B_2, B_3:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}; \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

donde $p_1 + p_2 + p_3 = 1$; $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Se afirma que si nos atenemos a la estrategia S_A^*, el adversario puede emplear las estrategias B_1, B_2, B_3 en cualesquiera proporciones, pero la ganancia quedará inalterable y como antes será igual al valor del juego v.

Demostremos esto de la manera siguiente: supongamos que v_1, v_2, v_3 son las ganancias que se obtendrán con nuestra estrategia S_A^* y las estrategias del adversario B_1, B_2 y B_3 correspondientemente.

De la definición de estrategia óptima se deduce que cualquier desviación del adversario de la estrategia S_B^* no le puede ser conveniente, por eso:

$$v_1 \geqslant v; \quad v_2 \geqslant v; \quad v_3 \geqslant v.$$

Veamos si la magnitud v_1, v_2 ó v_3 puede resultar *mayor* que v aunque sea en uno de los tres casos. Resulta que no. Efectivamente, expresemos la ganancia v de las estrategias óptimas S_A^*, S_B^* con ayuda de las ganancias v_1, v_2, v_3. Puesto que en la estrategia S_B^* se emplean B_1, B_2 y B_3 con las frecuencias q_1, q_2, q_3 tendremos

$$v = v_1 q_1 + v_2 q_2 + v_3 q_3 \tag{3.2}$$

$$(q_1 + q_2 + q_3) = 1$$

Es evidente que si una sola de las magnitudes v_1, v_2, v_3 fuese mayor que v, su valor ponderable promedio (3.2) sería también mayor que v, lo cual contradice a la condición expuesta. Así se demuestra la importante propiedad de las estrategias óptimas que vamos a utilizar ampliamente en la solución de los juegos.