III.8 PRÁCTICA V

ALUMNO____GRUPO_____

Problema 1.- Un número índice es un valor relativo con una base igual al 100% y se usa como indicador para el cambio relativo de una cosa o de un grupo de cosas. Los números índices más importantes en el análisis económicos pueden clasificarse en tres tipos 1)_______________________________
2)________________________3)__________________________
Los números índices que se construyen para un sólo artículo se denominan ______________________________ y los que se construyen para un grupo de artículos se llaman ____

Problema 2.- Los precios por unidad y las cantidades vendidas de un artículo para los años de 2001 y 2002, están dados más abajo. Calcular los índices de
a) precios
b) cantidades
c) valores para 2002 con 2001 como base.

Año	Precio por Unidad	Unidades Vendidas
2001	$ 1.10	150
2002	$ 1.32	120

Problema 3.- Los siguientes datos corresponden a la producción de ajonjolí (en miles de toneladas), en un determinado país. Calcule
a) los relativos de base fija con 1998 como base,
b) los relativos en eslabón y
c) los relativos en cadena.

Los datos corresponden al período de 1998 a 2002 y las cantidades producidas respectivamente son: 50, 75, 100, 120 y 140.

Problema 4.- Suponga que los precios y las cantidades de 4 artículos vendidos durante los años de 2001 y 2002 en una ciudad son como sigue:

Artículo	Precio por Unidad (pesos)		Cantidad (en 1,000 unidades)	
	2001	2002	2001	2002

A	0.6 lb.	0.65 lb.	45	138
B	1.45 lb.	0.48 lb.	180	120
C	80 ton.	85 ton.	14	10
D	1.5 ton.	1.42 ton.	20	15

Utilice los métodos de agregados ponderados para construir los números índices de

a) precios
b) cantidades y
c) valor, para 2002 con 2001 como base.

Problema 5.- Utilice la información del problema No. 4. Emplee los métodos de promedios relativos para construir los números índices compuestos de

a) precios no ponderados
b) cantidades no ponderadas
c) precios ponderados y
d) cantidades ponderadas.

Problema 6.- Utilice nuevamente la información del problema No. 4 y:

a) Calcule el Índice de precios ponderados para 2001 con base en 2002.
b) Demuestre que el método utilizado satisface la prueba de la reversidad temporal.
c) Demuestre que los índices de precios compuestos calculados satisfacen la prueba de reversidad de los factores.
d) Calcule el índice ideal de precios.
e) Calcule el índice ideal de cantidad.

IV INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD[7]

Contexto e importancia

Como señala el Profesor L. Kazmier, la teoría de la probabilidad se ha convertido en la base del desarrollo de los métodos que utilizamos en la inferencia estadística, misma que tiene su origen en el método inductivo, el cual indica que a partir del análisis de una porción de eventos o información particular podemos generalizar, es decir, se pasa de lo particular (muestra) a lo general (población o universo); en otras palabras, seleccionamos una muestra (porción) del universo, detectamos **sus características** y decimos que esas mismas características las tiene la población. o sea que la **Inferencia Estadística es** aquella disciplina que basada en el análisis de la muestra por medio de métodos y técnicas científicas, hace posible el conocimiento de las características de la población.

Ahora bien, es importante mencionar que cuando describimos las características de la población, **N**, a partir de la información de una muestra, **n**, no estamos seguros de que dicha descripción sea correcta o válida para todos los elementos de la población, por lo que siempre existirá el riesgo de aceptar la descripción cuantitativa de las características de la población a partir de una muestra. Dicho riesgo lo medimos aplicando la teoría de la probabilidad. O sea que en el proceso de información estadística nunca podremos evitar el riesgo o error de aceptar o rechazar a partir de la muestra, características que pueden o no ser ciertas para la población.

Si bien es cierto que no podemos evitar el riesgo, también es cierto que lo podemos controlar y cuantificar por medio de la teoría probabilística.

Idealmente quisiéramos tener a nuestra disposición un *procedimiento de selección de la muestra* que nos garantizara que es representativa de la población para reducir o eliminar el riesgo en la toma de decisiones sobre las características de la población a partir de la información muestral. Desafortunadamente no se ha descubierto tal procedimiento, por lo que nunca estaremos seguros de que una muestra específica sea representativa de una población específica.

Así, en lugar de garantizar que la muestra es representativa. Lo mejor que puede hacer el procedimiento de selección es darnos certeza de que no son introducidas fuentes distorsionadoras conocidas durante la selección de la muestra, que en este caso llamamos *muestra probabilística, que,* debe quedar claro, no es necesariamente representativa de la población.

Al respecto, es conveniente decir que uno de los requisitos de una muestra probabilística es que cada elemento de la población estadística tenga una **oportunidad** conocida, generalmente igual, de ser incluido en la muestra.

IV.1 Significado de probabilidad

Dicha oportunidad se llama probabilidad, la cual podemos **definir como la posibilidad expresada con un número positivo, de que ocurra un evento o resultado de interés para el investigador .** De lo anterior se observa que una expresión probabilística siempre constituye una **ESTIMACIÓN de un valor desconocido que regirá un evento que todavía no ocurre.**

Derivado de lo anterior, cabe mencionar que la teoría de la probabilidad se ha convertida en la base del desarrollo de las técnicas de inferencia Estadística, las cuales son utilizadas en todos los campos de la investigación básica y aplicada incluyendo el análisis económico y las decisiones empresariales.

Existen dos procedimientos para el cálculo de la probabilidad:
El 1º se refiere al enfoque objetivo y el 2º se refiere al enfoque subjetivo.

La probabilidad objetiva se calcula por dos métodos:
<u>El clásico ó teórico y el de frecuencias relativas</u>.

El enfoque subjetivo referente a la interpretación de un valor probabilístico, se basa en la confianza o seguridad que una persona tenga sobre la ocurrencia de un evento.

Un ejemplo de éste sería la fuerte creencia, de 0.95, de que se firmará un contrato de la STUNAM y la UNAM. El 31 de octubre del 2002.

Este evento es único, no puede ser repetido muchas veces, sencillamente el 0.95 refleja la confianza que hay sobre la firma del contrato-laboral. De manera general diremos que cuando existe un evento con un sólo resultado posible, el concepto de probabilidad **subjetiva** es aplicable.

Por otra parte, en lo que respecta a la probabilidad **objetiva**, su cálculo por cualquiera de los dos métodos antes mencionados no difiere sustancialmente; su diferencia radica en el **tiempo** en que se calcula determinado valor probabilístico. Esto es, el procedimiento clásico se caracteriza por la determinación **apriorística** de los valores antes de haber observado los eventos;: en otras palabras, no es necesario hacer el experimento para observar y registrar su resultado, es decir, la probabilidad se calcula teóricamente.

EJEMPLO:

Cuando se dice que un medio $(\frac{1}{2})$ es la probabilidad de obtener águilas en el lanzamiento de una moneda, esto se dice sin haber lanzado la moneda al aire (el experimento es el lanzamiento de la moneda). Por eso se dice que la probabilidad así calculada **es un valor esperado** con el al método clásico o teórico, el cual **supone en** el ejemplo que utilizamos de la moneda, una simetría básica en los posibles resultados de un evento, por ello la moneda o el dado que se utilizará, no deben estar deformada o en el caso del dado, no debe estar "cargado ", para poder calcular la probabilidad a priori.

También debemos decir que el cálculo anterior se basa en el **supuesto** de que los resultados posibles son mutuamente excluyentes e igualmente probables de ocurrir. Al respecto, es conveniente decir que en el mundo de la economía y los negocios los resultados posibles no son igualmente probables y no conocemos de antemano su probabilidad de ocurrencia, situación que limita el uso del método clásico para calcular las probabilidades. La mayor crítica es que el término "igualmente probable" presupone el conocimiento previo de la teoría de la probabilidad, situación que no siempre es cierta, además de que en el mundo real no siempre podemos suponer que los resultados serán "igualmente probables",de ahí que sea interesante, muchas veces, recurrir al método de las frecuencias relativas.

Al respecto, de acuerdo con el método de frecuencias relativas, en que la probabilidad de un evento se basa en un resultado observado o verificado, en otras palabras, las probabilidades se calculan **después** de haber realizado el experimento y una vez que se han registrado los resultados del mismo. Así la probabilidad de un resultado cualquiera es la frecuencia relativa de ese producto o resultado en un gran número de eventos repetitivos.

Es importante señalar que con este método para calcular la probabilidad, que a medida que **aumenta** el número de observaciones de los eventos y de sus resultados, **aumenta** la exactitud en el cálculo de la probabilidad, inclusive tiende a estabilizarse en cierto valor, por ejemplo, si realizamos el experimento de lanzar al aire, digamos 500 veces una moneda y registramos el número de veces que cae "aguila ", la frecuencia relativa, es decir la probabilidad, tiende a estabilizarse alrededor del valor 0.5. Derivado de lo anterior, decimos que la probabilidad asì calculada es **un valor estimado**, cuya exactitud será mayor a medida que aumentemos el experimento.

Una vez establecida la diferencia entre uno y otro de los dos métodos del enfoque objetivo, a continuación podemos profundizar señalando lo siguiente:

DEFINICIÓN CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD.

Laplace definió la probabilidad como una razón matemática entre un grupo de eventos con características especiales y la totalidad de eventos posibles. Explícitamente diremos: "si un experimento da lugar a **(n)** eventos mutuamente excluyentes, todos igualmente probables y **(r)** se consideran favorables, entonces la probabilidad de un evento favorable es **r/n** ".

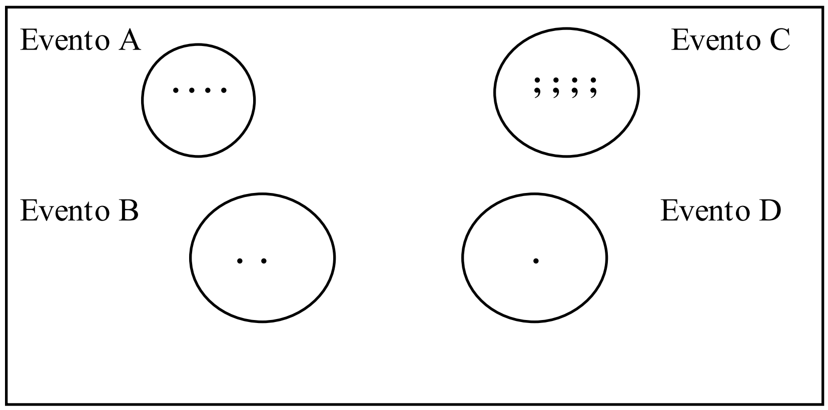
De lo anterior observamos que un valor probabilìstico es indicativo de la frecuencia esperada de un resultado posible en particular, dentro del total de resultados posibles que arroje un experimento.

Un evento será una muestra cuyos puntos o elementos son resultados posibles de un experimento. Lo anterior, en el caso de una baraja americana, gráficamente se verá así:

))))))))))))))))))))
♣♣♣♣♣♣ ♣♣♣♣♣♣♣♣ ♣♣♣♣♣♣♣♣ ♣♣♣♣♣♣♣♣

♠♠♠♠♠♠♠ ♠♠♠♠♠♠♠♠ ♠♠♠♠♠♠♠♠ ♠♠♠♠♠♠♠♠
●●●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●●●●●
Oooooooooo ooooooooooo ooooooooooo ooooooooooo

Como se observa, un evento puede estar representado por un punto o un agregado de puntos.
Gráficamente:



Serán eventos o resultados verificables A, B, C, D; donde cada uno de ellos está formado por un punto como D, ó agregado de puntos como A,B,C.

AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

1º.- A cada punto se le asigna un número positivo, llamado probabilidad.
2º.- Todos los puntos tienen la misma probabilidad de ocurrencia.
3º.- La suma de las probabilidades del espacio muestral es igual a 1.
4º.- La probabilidad de un punto oscila entre 0 y 1, es decir $0 \leq p(x) \leq 1$

Conforme a los anterior podemos establecer que la probabilidad de cada resultado de un experimento es **1/n**.

Al respecto **el espacio muestral** puede definirse como la suma de todos los puntos de una muestra, o de resultados posibles que produce un experimento. En opinión de Yu Lun Chou(21) realmente debería llamarse **"espacio de resultados", por que eso son.**

EJEMPLO.- El experimento "lanzamiento de dos monedas" genera un espacio muestral, conteniendo cuatro puntos o resultados posibles (AA, AS, SA, SS):

donde A = ÁGUILA

S = SOL

El evento "caras iguales", esta compuesto de dos puntos (AA y SS). Si queremos saber cual es la probabilidad de que caigan caras iguales (águilas o soles) en un lanzamiento de dos monedas, con el método clásico, ésta será:

$$P(A,A \text{ ó } S,S) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad fue desarrollada por Pascal

Aplicaciones:

1.- Inferencia estadística:
Muestreo Estadístico, estimación de parámetros y prueba de hipótesis

2.- Econometría:
Modelos Econométricos

3.- Teoría de las Decisiones:
Teorema de Bayes

Para desarrollar la teoría probabilística fue necesario identificar y cuantificar el número de resultados posibles, marco de referencia, espacio muestral que genera un experimento, puesto que sólo así se puede cuantificar la probabilidad de éxito o fracaso en la obtención de un resultado de interés particular.

Al respecto la probabilidad se desarrolló en gran parte en los juegos de azar, que constituyen uno de los principales marcos de referencia, la cual posteriormente se utilizó en biología para seleccionar y utilizar muestras probabilísticas que dieran confianza o seguridad a los resultados de sus experimentos. Así, en el caso de la moneda, el marco de referencia son las dos caras de la misma. En el caso de un dado son las seis caras. Cuando son dos dados el espacio muestral está constituido por 36 resultados posibles.

Gráficamente :

D 6| o o o o o o Marco

								muestral
A	5	o	o	o	o	o	o	constituido
								por
D	4	o	o	o	o	o	o	36
								resultados
O	3	o	o	o	o	o	o	posibles
#	2	o	o	o	o	o	o	
1	1	o	o	o	o	o	o	
		1	2	3	4	5	6	

D A D O # 2

En el caso de una baraja española el marco muestral esta constituido por 40 cartas o resultados posibles.

En el caso de una baraja americana esta constituida por 52 cartas o resultados posibles. Estos resultados se clasifican en 4 grandes grupos: Diamantes, Corazones, Tréboles, Picas, que a su vez se agrupan en dos colores, negro (26 resultados) y rojo (26 resultados).

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K

Una vez que se conoce el marco de referencia se puede decir qué es posible calcular la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de los resultados comprendidos en el marco de referencia. En otras palabras la probabilidad representa la cuantificación de éxito o fracaso de un resultado posible.

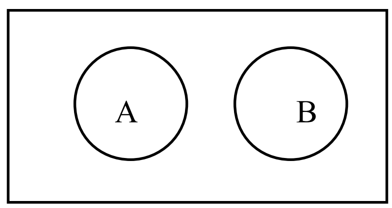
IV.2 RESULTADOS POSIBLES DE UN EXPERIMENTO

Pueden ser:

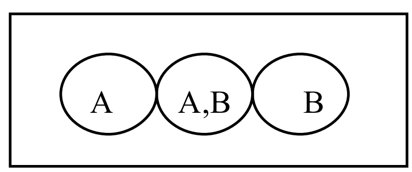
.**IV.2.1 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES**: A y B lo son cuando en un experimento sólo ocurre uno de ellos. La probabilidad de que ocurra uno o el otro es igual a la suma de sus probabilidades de ocurrencia.

$$P(A \text{ ò } B) = P(A) + P(B)$$

El siguiente diagrama se llama de **diagrama de Venn** y comprende todos los resultados posibles de un experimento, con uno o mas resultados identificados especìficamente, cuyo conjuntose llama espacio muestral; cualquier resultado se identifica como un punto en ese espacio y el àrea relativa asignada a ese punto no necesita ser indicativa de su probabilidad.



Cuando hay intersección entre ellos es decir, que tienen puntos en común, decimos que no son eventos mutuamente excluyentes. Gráficamente se ven así:

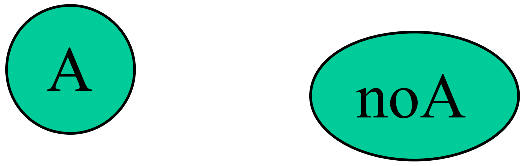


En ese caso el cálculo de su probabilidad es:

$$P(A \text{ ó } B) = P(A) + P(B) - P(A,B)$$

De lo anterior, cuando A y B son mutuamente excluyentes, P(A,B)= 0

En el siguiente diagrama se representa la P(A) y P(no A), ésta última indica la probabilidad de que no ocurra A, tal que P(A) + P(no A) = 1, que ocupan todo el espacio muestral



Los eventos mutuamente **excluyentes** pueden ser más de dos; ejemplo:
Sabemos que la probabilidad de que los estudiantes de posgrado obtengan 10 de calificación es 0.12; P(9)= 0.13 ; P(8)= 0.12; P(7)= 0.18; P(6)= 0.20 y P(5)= 0.25, cuya suma es 1.0, decimos que la suma de todos los resultados mutuamente excluyentes es igual a 1.0, lo cual cumple con uno de los axiomas de la probabilidad. Podemos hacer cálculos como los siguientes:

P(5 o`6)= 0.25 + 0.20 = 0.45;
P(5 o`6 ò 7) = 0.25+0.20+0.18 = 0.63;
P(8 `0 9) = 0.12+ 0.13 = 0.25,
P (8 ò 9 ò 10) = 0.12+.013+0.12 = 0.37

IV.2.2 EVENTOS INDEPENDIENTES: A y B son independientes cuando ocurren separadamente en el tiempo o en el espacio; cuando la ocurrencia de uno no afecta la del otro. La probabilidad de que ambos ocurran es:

$$P\ (A\ y\ B) = P\ (A) * P\ (B)$$

Aquí tambièn es conveniente advertir que a diferencia de los resultados posibles que pueden surgir en los juegos de azar, en el mundo de los negocios los eventos y sus resultados raras veces son independientes, sin embargo, con ese señalamiento, no deja de ser útil para la toma de dicisiones.

IV.2.3 EVENTOS DEPENDIENTES Y PROBABILIDAD CONDICIONADA
Cuando A y B no son independientes surge el concepto de probabilidad condicional y para determinar la probabilidad de una **secuencia de eventos** ponemos P(B\ A), significa la probabilidad de que ocurra B dado que A ocurrió previamente.

Ejemplo: Suponga que un cargamento de diez motores contiene uno defectuoso, D, y nueve no defectuosos, ND. Al inspeccionarlos, obtenga la probabilidad de uno defectuoso, D, y los otros nueve no defectuosos, ND.

revisión de uno de dos motores
sabemos que para el primero:
P(ND)= 9/10 y que P(D)= 1/10
La revisión de un segundo motor, dado que ya se revisó uno antes puede generar:
1).- P(ND\ND) = 8/9 *9/10 = 72/90= 4/5 =8
2).- P(D\ND) =1/9* 9/10= 9/10=9/90=1/9 =.1
3.- (ND\D)= 9/9*1/10 = 9/90= 1/9= .1
4.- (D\D)= 0
suma = 1.0
Con estas referencias, a continuación recordemos algunos conceptos que necesitaremos para relacionarlos con lo que hemos visto hasta el momento y en su oportunidad dar continuidad al análisis de la relación que tiene la probabilidad con la inferencia estadística.

V.2.4 FUNCIÓN.- Es una relación de dependencia unívoca.
Si y = f(x), decimos que los valores de y, variable dependiente, están en función de los valores que tome x, variable independiente.
IV.2.5 VARIABLE.- Es aquella literal (x,y,z, etc.) que toma los valores dados en un espacio muestral dado.
IV.2.6 VARIABLE NUMÉRICA.- (no se considera la probabilidad).

Ahora relacionando lo que conocemos hasta el momento, definamos, calculemos y veamos el alcance de la:

IV.2.7 VARIABLE ALEATORIA, X,.- Es una función real valorada y definida en un espacio muestral, con su probabilidad de ocurrencia asociada. Así, en el caso de un dado toma los valores: 1,2,3,4,5,6, con su probabilidad asociada de ocurrencia y permite calcular sus **valores esperados: E(Xi)**
E(Xi)= 1(1/6)+2(1/6)+3(1/6)+4(1/6)+5(1/6)+6(1/6) = 21/6= 3.5, que es un valor engañoso, ya que 3.5 no es un valor esperado de Xi puesto que los únicos posibles valores son 1,2,3,4,5,6. Pero **E(Xi) es lo que debe esperarse en un sentido de promedio**, también conocida como la media de Xi = E(Xi)=. μ_x, que también se conoce como media aritmética ponderada en términos de probabilidad, expectativa matemática o media de una variable aleatoria X.
Ejemplo 1:Sabemos que :

Xi	P(Xi)	Xi- μ_x	$(Xi-\mu_x)^2$	P(Xi)* $(Xi-\mu_x)^2$
1	**1/6**	**-2.5**	**6.25**	**1/6*6.25**

2	**1/6**	**-1.5**	**2.25**	**1/6*2.25**
3	**1/6**	**-0.5**	**0.25**	**1/6*0.25**
4	**1/6**	**+0.5**	**0.25**	**1/6*0.25**
5	**1/6**	**+1.5**	**2.25**	**1/6*2.25**
6	**1/6**	**+2.5**	**6.25**	**1/6*6.25**
suma			**17.50**	**17.50/6**

efectivamente μ_x= 1+2+3+4+5+6+/ 6= 21/6= 3.5

Ejemplo 2: Ahora bien, si el experimento se repite varias veces, el valor esperado no es necesario que sea un valor posible de la variable aleatoria, como lo muestra el ejemplo anterior de E(Xi)= 3.5. Como concepto, como medida de tendencia central, es un concepto básico que se usa mucho en la economía y los negocios, cuya aplicación en estos campos se ilustra de la manera siguiente:

La probabilidad de que se incendie una casa en la colonia Juárez del Distrito Federal en cualquier día del año 2002, es 0.005. La Compañía de Seguros Monterrey le ofrece al dueño de la casa un seguro contra incendios con una póliza por $ 20,000. por un año; cuyo costo es $ 150.00 .En este caso ¿ cuál es la utilidad esperada de Seguros Monterrey ?

La utilidad definida por, U, es una variable aleatoria que puede tomar los valores de $150.00 si no se incendia la casa y, de $ 19,850.00 si es que se incencia durante el año 2002, periodo que cubre la póliza contratada. Así, la función de probabilidad de U es :

Valor de U: ui	+ $ 150.00	- $ 19,850.00
Probabilidad: P(ui)	0.995	0.005

Su E(Ui) = (150)(0.995) + (-19,850)(0.005)= $ 50.00

La esperanza matemática o utilidad esperada por la póliza vendida siempre debe **ser positiva,** como es el caso, para permitir a Seguros Monterrey el pago de gastos de administración y acumular reservas para pagar los siniestros a los beneficiarios y tenedores de pólizas.

Ejemplo 3:

Lo anterior, desde el punto de vista del comprador, el seguro como cualquier juego de azar que se hace para obtener una utilidad, tiene un valor esperado **negativo.**

Valor de U:ui	+ 19,850.00	- $ 150.00
Probabilidad:P(ui)	0.005	0.995

Su E(Ui)= 19850(0.005) + (-150)(0.995)= 99.25-149.25= $ -50

la cantidad de *menos $50.00 es lo que espera ganar en promedio,* en caso de que se incendie la casa y cobre el seguro por $ 20,000.00.
La varianza de la variable aleatoria se define como σ^2= Var(Xi)= E(Xi- μ_x)^2 tanto para variables discretas como continuas. Así, Var(Xi)= 17.50/6=2.91 y la desviación estándar, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ = 1.70.
Con esos antecedentes, como se indicó, "LAPLACE" pudo cuantificar la probabilidad al decir que "es una razón" matemática que surge de relacionar un resultado de interés con el total de resultados posibles.

Con literales podemos decir que: **(Cr)** representa uno o varios resultados de interés y **(Cn)** representa el total de resultados posibles, entonces si **(P)** denota probabilidad, por consiguiente la **P(Cr) = r/n**.

Así cuando **r = 1** diremos que la **P(Cr) = 1/n**.
Lo anterior significa que una vez conocido el marco muestral, la probabilidad de cada uno de los resultados posibles tiene la misma probabilidad de ocurrencia, ergo, en el experimento que consiste en lanzar un dado una vez, observamos que la probabilidad de obtener 1, es 1/6, también que la probabilidad de obtener dos es 1/6, y en general la probabilidad de cualesquiera de los 6 resultados posibles es 1/6.

Al respecto es conveniente indicar que para el desarrollo de la teoría probabilística fue válido señalar que todos los resultados posibles en un experimento dado, tienen la misma probabilidad de ocurrencia. No obstante en la vida real esto no es del todo cierto.

IV.3 ANÁLISIS COMBINATORIO

En la aplicación de la probabilidad con frecuencia se necesita o es conveniente **contar un gran número de objetos o resultados posibles de un experimento;** en cuyo caso es difícil enumerar o contar el número total de puntos de muestras posibles (subconjuntos) en el espacio muestral, también llamado espacio de resultados. Para resolver esta situación se utilizan las técnicas de **permutación y combinación,** que a su vez, se basan en el principio de multiplicación, el cual establece[21] : " si una operación puede efectuarse en **n1** formas y enseguida, después de realizarse en cualquiera de esas formas, se puede efectuar una segunda operación en **n2** formas, y después de ser ejecutada en cualquiera de estas formas, se puede realizar una tercera operación en **n3** formas, y así sucesivamente hasta k operaciones, entonces las k operaciones pueden ejecutarse en las siguientes formas:

(n1)(n2)(n3)..........(nk-1)(nk) formas´

Agreguemos a lo anterior, como referencia adicional, que ya aprendimos a calcular la probabilidad de ocurrencia de los resultados posibles de un experimento, y estuvimos en condiciones de definir y obtener la variable aleatoria, así como su valor esperado o promedio en un espacio muestral determinado.

Ahora vamos a utilizar los conceptos anteriores en el contexto del análisis combinatorio, que a su vez nos permitirá profundizar en la demostración de la relación que tiene la probabilidad con la inferencia estadística, ahora, en el contexto de analizar de cuantas maneras diferentes podemos clasificar o arreglar dichos resultados posibles que, dicho en otras palabras, podremos saber cuantas muestras podemos obtener y de cuantas maneras distintas podemos constituirlas u ordenarlas con las unidades de muestreo que las componen.

IV.3.1 Permutaciones

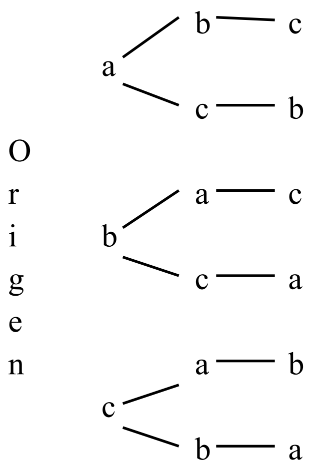
Así, empezaremos diciendo que una permutación es un arreglo de todos o parte de los objetos dentro de un conjunto de objetos en un orden definido. El número total de permutaciones de un conjunto de objetos depende del número de objetos tomados a la vez para cada permutación. El número de objetos tomados a la vez para cada permutación puede ser:

a) Todos los objetos ó
b) Parte de los objetos.

ejemplo del primer caso:

Encontrar el número total de permutaciones del conjunto de letras (a, b, c) tomadas todas a la vez.

Usando el diagrama de árbol, vemos que serían los siguientes:



PERMUTACIONES
(Arreglos ordenados posibles)

a b c
a c b
b a c
b c a
c a b
c b a

Cálculo numérico: $\frac{A}{3} * \frac{B}{2} * \frac{C}{1} = 6$ permutaciones

Hay 6 permutaciones. Nótese que el arreglo A,B,C, es diferente de B,A,C aun cuando cada uno de los 2 arreglos consiste de las mismas letras, luego en este caso decimos que **el orden** en que aparece cada letra es **muy importante**. El número de permutaciones también se puede obtener con la formula :
${}_nP_n$=n!=n(n-1)(n-2)(n-3)...3x2x1= ${}_3P_3$ = 3x2x1 = 6 porque n=3.

Ahora bien cuando n=4 tendremos ${}_4P_4$ = 4! = 4x3x2x1 =24 permutaciones.

EJEMPLO DEL SEGUNDO CASO: SOLAMENTE PARTE DE DOS OBJETOS Si definimos r = el número de objetos, tomados a la vez para cada permutación, entonces la formula es ${}_nP_r$.

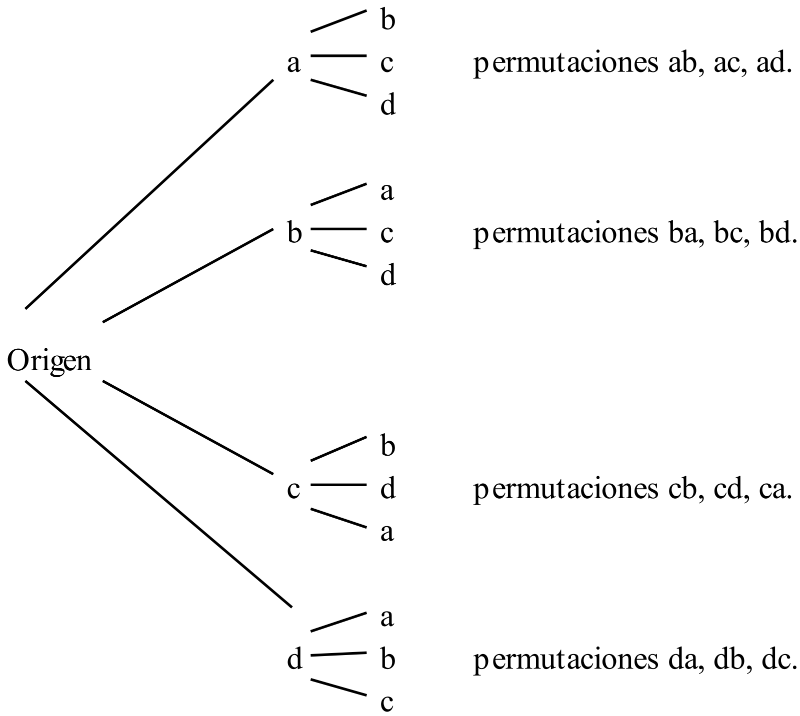
${}_nP_r$= el número total de permutaciones de **n** objetos, tomados **r** a la vez. Con n=4 y tomando $_r$ a la vez, calculemos :

a) Tres a la vez; n= 4; r= 3 ${}_nP_r = {}_4P_3$
${}_4P_3 = 4 * 3 * 2 = 24$

b) Dos a la vez n= 4 , r= 2 ; ${}_{n}P_{r} = {}_{4}P_{2} = 4*3=12$

también se puede obtener con $\dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{4*3*2*1}{2*1} = \dfrac{24}{2} = 12$

Lo anterior gráficamente se ve así



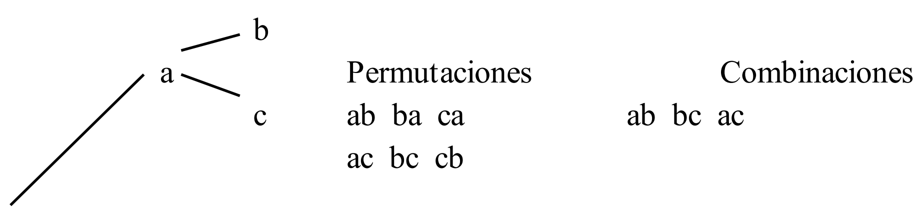
IV.3.2 COMBINACIONES

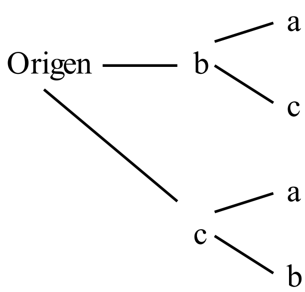
Una combinación es un subconjunto o un arreglo de todos o parte de los objetos de un conjunto **sin considerar el orden** de los objetos.

Ejemplo: Encontrar el número total de combinaciones tomando dos a la vez del conjunto (a, b, c).

$\dfrac{{}_{3}C_{2}}{2!} = \dfrac{3*2}{2*1} = \dfrac{6}{2} = 3$ combinaciones tomando 2 letras a la vez.

Lo anterior se corrobora usando el diagrama de árbol.





IV.3.3 EJERCICIOS

IV.3.3.1.-DE ANÁLISIS COMBINATORIO AMPLIADO.[9]

Para afianzar el conocimiento, ahora diremos que se utilizan las fórmulas anteriores para obtener numéricamente el número de arreglos diferentes que se pueden obtener cuando ya no es visible el espacio muestral. Supongamos que se tiene **(n)** objetos diferentes y se quiera conocer el número de maneras de ordenar estos objetos. Se puede pensar que hay **(n)** espacios ó lugares donde se puede colocar los **(n)** objetos a fin de dar forma a cada uno de los ordenamientos.

Así habrá **(n)** posibilidades para el primer objeto, n-1 para el segundo, n-2 para el tercero y así sucesivamente hasta llenar el último lugar con el último objeto.

Este desarrollo no es otra cosa que el producto de nPn :
${}_nP_r$ = n (n-1)(n-2)...1 = n!; que sería la fórmula para obtener el número total de ordenaciones que también se llaman permutaciones para **(n)** objetos.

En un esfuerzo adicional por consolidar la familiaridad con el manejo de los conceptos que integran el conocimiento del análisis combinatorio, dada la importancia que tiene para la inferencia estadística, decidí complementar mi exposición con la del PROFESOR S. SHAO, quien dice:

"Una permutación es un arreglo de todos o parte de los elementos dentro de un conjunto de objetos en un orden definido. El número total de permutaciones de un conjunto de objetos depende del número de los mismos, tomados a la vez para cada permutación puede ser :
a) Todos los objetos ó

b) Parte de los objetos
Ejemplo del primer caso:

Encontrar el número total de permutaciones del conjunto de letras {a, b, c,} **tomadas todas a la vez**.

PERMUTACIONES
(Arreglos ordenados posibles)

```
                      b ———— c    abc
               a
                      c ———— b    acb
                      a ———— c    bac
Origen ——————— b
                      c ———— a    bca
                      a ———— b    cab
               c
                      b ———— a    cba
```

Hay seis permutaciones. Nótese que el arreglo a, b, c, es diferente de a, c, b, aunque cada uno de los dos arreglos consista de las mismas letras.

El orden de cada arreglo de letras es importante en una permutación. El número de permutaciones se puede obtener con la formula Nº 1.

FORMULA Nº 1.. ${}_nP_r = n! = n\,(n-1)(n-2)(n-3)...3 * 2 * 1$

Gráficamente será $\frac{\boldsymbol{A}}{3*}\frac{\boldsymbol{B}}{2*}\frac{\boldsymbol{c}}{1} = 6$ permutaciones .

También se puede obtener así ${}_3P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$ permutaciones.

Otro ejemplo: encontrar el número total de permutaciones del conjunto de dígitos (1, 3, 5, 7,) tomados todos a la vez.

Aquí n = 4 luego $4\ P_4 = \frac{1}{4}\frac{3}{3}\frac{5}{2}\frac{7}{1} = 4! = 24$ permutaciones, que usando el diagrama de árbol se observa que están ordenadas o integradas de la siguiente forma:

```
        5 ---- 7 -------- 1, 3, 5, 7.
1, 3
        7 ---- 5 -------- 1, 3, 7, 5.
        3 ---- 7 -------- 1, 5, 3, 7.
1, 5
```

7 ---- 3 -------- 1, 5, 7, 3.
3 ---- 5 -------- 1, 7, 3, 5.
1, 7
5 ---- 3 -------- 1, 7, 5, 3.
5 ---- 7 -------- 3, 1, 5, 7.
3, 1
7 ---- 5 -------- 3, 1, 7, 5.
1 ---- 7 -------- 3, 5, 1, 7.
3, 5
7 ---- 1 -------- 3, 5, 7, 1.
1 ---- 5 -------- 3, 7, 1, 5.
3, 7
5 ---- 1 -------- 3, 7, 5, 1.
3 ---- 7 -------- 5, 1, 3, 7.
5, 1
Origen 7 ---- 3 -------- 5, 1, 7, 3.
1 ---- 7 -------- 5, 3, 1, 7.
5, 3
7 ---- 1 -------- 5, 3, 7, 1.
1 ---- 3 -------- 5, 7, 1, 3.
5, 7
3 ---- 1 -------- 5, 7, 3, 1.
3 ---- 5 -------- 7, 1, 3, 5.
7, 1
5 ---- 3 -------- 7, 1, 5, 3.
1 ---- 5 -------- 7, 3, 1, 5.
7, 3
5 ---- 1 -------- 7, 3, 5, 1.
1 ---- 3 -------- 7, 5, 1, 3.
7, 5
3 ---- 1 -------- 7, 5, 3, 1.

AHORA PERMUTACIONES DE OBJETOS DIFERENTES TOMADOS PARTE A LA VEZ.

También se puede obtener por medio del diagrama de árbol o con las siguientes fórmulas. El diagrama de árbol es similar a los dos casos anteriores excepto que el número de columnas en este caso es igual al número de objetos tomados para cada permutación. En general sea:

r = El número de objetos, tomados a la vez para cada permutación.
$_n\mathbf{P}_r$ = El número total de permutaciones de n objetos, tomados r a la vez.

Entonces:
Fórmula Nº 2
$_nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-r+1)$ para r factores. Nótese que el último factor (n-r+1) es simplificado de [n-r (-1), También cuando r = n, el último factor se vuelve (n-n+1) = 1. Luego cuando r = n, está última fórmula es idéntica a la del número 1.

Ahora bien la fórmula 2 también se puede escribir así:
Fórmula Nº 3: $_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

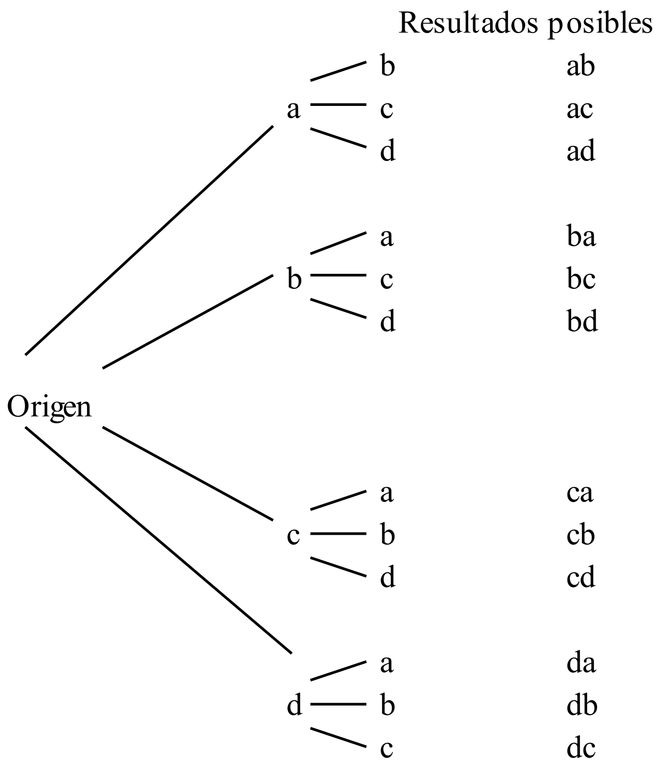
Esta fórmula es conveniente para cálculos cuando se tiene disponibles tablas de n! y (n-r)!

Ejemplo. Encontrar el número total de permutaciones del conjunto de letras (A, B, C, D) tomados a) tres a la vez y b) dos a la vez.

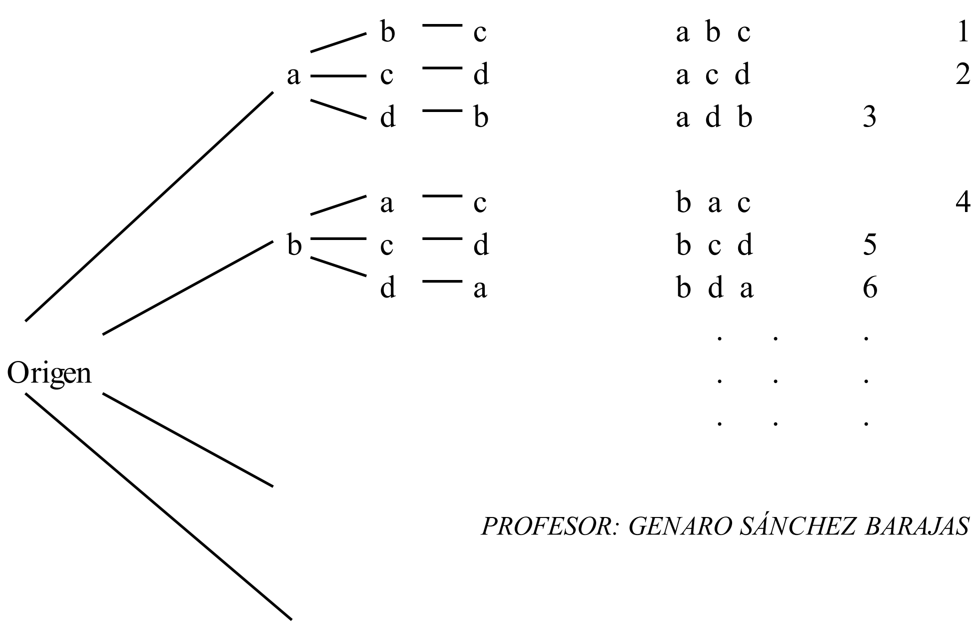
a) Aqui: n = 4 (Número de letras en el conjunto dado)
r = 3 (Número de letras tomadas a la vez para cada permutación).
$_nP_r = {}_4P_3 = 4*3*2=24$

También: $_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{4*3*2*1}{1} = 24\,\boldsymbol{permutaciones}$
b)Aquí, n = 4; r = 2; $_nP_r = {}_4P_2 = 4*3 = 12$
También: $_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{4*3*2*1}{2*1} = 12\,\boldsymbol{permutaciones}$

El diagrama de árbol correspondiente se obtiene de la siguiente manera, para las 12 permutaciones:



Igualmente, en el caso del inciso a) tendremos:
Cuando ${}_nP_r = {}_4P_3 = 24$ permutaciones.



	a	b	c a b	19
c	b	d	c b d	20
	d	a	c d a	21
	a	c	d a c	22
d	b	a	d b a	23
	c	b	d c b	24

Otro ejemplo: Tres oficiales: Presidente, Vicepresidente y Secretario, van a ser elegidos de 20 miembros de un club. ¿De cuántas maneras pueden ser elegidos los tres oficiales?.

Aquí :n = 20; r=3; ${}_nP_r = {}_{20}P_3 = 20*19*18 = 6840$ maneras

ó $${}_nP_r = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \frac{20*19*18*17*\ldots 3*2*1}{17*16*15*\ldots 3*2*1} = 6840\,\boldsymbol{maneras}$$

COMBINACIONES.- Es un subconjunto o un arreglo de todos o parte de los objetos de un conjunto sin considerar el orden de los objetos.

El número total de combinaciones posibles de un conjunto de objetos tomados todos a la vez es 1.

Por ejemplo:

Los arreglos posibles del conjunto de letras (A, B) son AB y BA. Puesto que el orden del arreglo no es considerado, el arreglo AB es el mismo que BA. Por lo tanto hay solamente una combinación (A y B) posible para el conjunto. Gráficamente :

	a ________ b	ab	
ORIGEN			$\begin{bmatrix} dos \\ permutaciones \end{bmatrix}$ y una combinación
	b ________ a	ba	

El número total de combinaciones posibles de un conjunto de objetos diferentes **tomados parte a la vez** puede ser obtenido encontrando primero el número total de permutaciones contando después las permutaciones con los mismos objetos como una combinación. Ejemplo: Encontrar el número total de combinaciones del conjunto de letras (A, B, C) tomados dos a la vez.

El número total de permutaciones de tres letras, tomadas dos letras a la vez es:

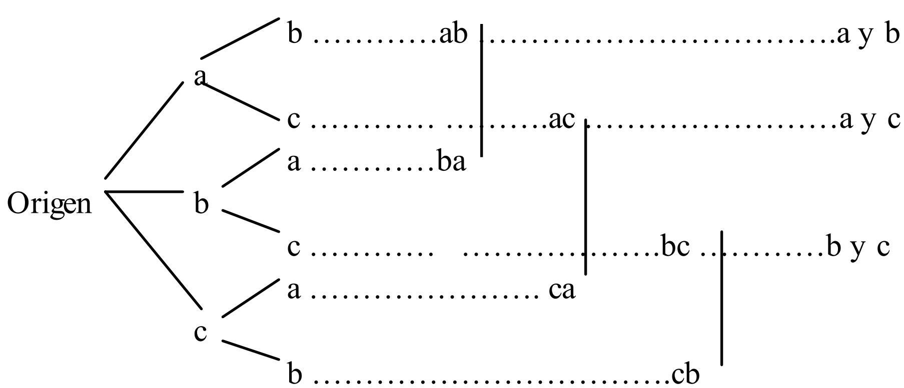
${}_3P_2 = 3*2 = 6$; cada arreglo consiste de dos letras.

Las seis permutaciones consistentes en las mismas letras son consideradas como tres combinaciones. Por lo tanto el número total de combinaciones es:

$$\frac{{}_3P_2}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

USANDO EL DIAGRAMA DE ÁRBOL SE OBTIENE DE LA SIGUIENTE MANERA:

Permutaciones Combinaciones



En general, sea:

n = El número total de objetos de un conjunto dado.

r = El número de objetos tomados a la vez para cada combinación.

${}_nC_r$ = El número total de combinaciones de n objetos, tomados r a la vez.

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \textit{como } {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \textit{ entonces } {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Así el ejemplo anterior también puede ser calculado con estas fórmulas:

$${}_nC_r = {}_3C_2 = \frac{3*2}{2*1} = 3 = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{3*2*1}{2!(3-2)!} = 3 \text{ combinaciones.}$$

Con ello se puede plantear el siguiente problema: Tres de 20 miembros van a ser seleccionados para formar un comité ¿de cuantas maneras puede ser formado el comité?.
Respuesta: El comité formado por los miembros A, B, C, es el mismo que el comité formado por B, C, A u otro arreglo consistente de los tres miembros por lo tanto este es un tipo de problema de combinación, puesto que no consideramos el orden del arreglo.
Aquí: n =20; r = 3

$$ {}_{n}\boldsymbol{C}_{r} = {}_{20}\boldsymbol{C}_{3} = \frac{{}_{20}\boldsymbol{P}_{3}}{3!} = \frac{20*19*18}{3*2*1} = 1{,}140 $$

Generalizando entonces tenemos:

COMBINACIONES.

Si hay n objetos diferentes y si deseamos tomar r a la vez, su fórmula será:

$$ {}_{n}C_{r} = \frac{{}_{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

De tal forma que si n = 52 y deseamos tomar r = 5 a la vez;

$$ \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 52 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2{,}598.960 $$ maneras o combinaciones.

Si dentro de las 5 cartas, deseamos que 3 sean ases, entonces.
P(3 ases + 2 cartas) = 4(1,128) = 4,512 casos favorables, puesto que

$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4$ casos favorables y $\begin{bmatrix} 48 \\ 2 \end{bmatrix} = 1{,}128$ casos favorables, luego

$$ \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{4{,}512}{2{,}598{,}960} = 0.00174 $$

IV.3..3.2 EJERCICIOS SOBRE EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES (3)

Hemos dicho que dos o más eventos son mutuamente excluyentes si no puede ocurrir en un cierto experimento más de uno de ellos. La probabilidad de que ocurra uno o el otro dentro de un conjunto de eventos mutuamente excluyentes, es igual a la suma de sus probabilidades de ocurrencia.
Si A = AS ; B = REY

Entonces del ejemplo anterior :

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$; también $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$;

Si deseamos conocer la probabilidad de obtener AS o REY, esto es A o B, entonces :

P (A o B) = P (A) + P (B)

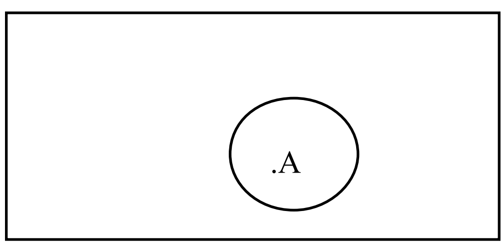
P (A o B) = 1/13 + 1/13 = 2/13

IV.3.3.3 DIAGRAMA DE VENN

Recordemos que un diagrama que comprende todos los resultados posibles de un evento con uno o más resultados específicamente identificados se llama **Diagrama de Venn**.

El conjunto de todos los resultados posibles se llama espacio muestral y cada resultado se identifica como un punto en el espacio.

Utilizando el DIAGRAMA DE VENN: ilustremos la probabilidad de A en un espacio muestral.



Podemos decir que si P (A) es la probabilidad de ocurrencia de A. P (~ A) es la probabilidad de que no ocurra A.

P (A) + P (~ A) =1

En el lanzamiento de un dado la P (AS) es 1/6.

Esto es:

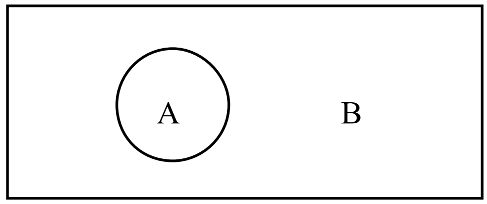
A: P (AS) =1/6

B: P (~ AS) = 5/6

luego la P (A) + P (B) = 1

Esto es, la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles de eventos mutuamente excluyentes es.

1/6+5/6=1



Ejemplos adicionales de eventos mutuamente excluyentes.

1º.- En el lanzamiento de una moneda la ocurrencia de un águila y la de un sol son eventos mutuamente excluyentes.

2º.- El lanzamiento de una moneda dos veces genera eventos mutuamente excluyentes en cada lanzamiento.

3º.- Al sacar una carta de una baraja americana ¿puede salir un as y un rey?
No, luego entonces estos dos resultados posibles son mutuamente excluyentes.

4º.- Al sacar una carta de una baraja americana ¿puede salir un as y una espada?
Si, luego no son eventos mutuamente excluyentes.

El cálculo de los eventos mutuamente excluyentes puede generalizarse para situaciones **en los cuales se manejen 2 ó más eventos mutuamente excluyentes.**

Ejemplo:

No. de hijos por familia	0	1	2	3	4	5 ó más
Proporción	0.10	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15

¿Cuál es la probabilidad de que una familia escogida aleatoriamente dentro de un grupo tenga 5 o más hijos?.

Respuesta: 0.15, la proporción representa la probabilidad de acuerdo con el cálculo de la probabilidad por el método de las frecuencias relativas.

¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga tres o más hijos?

A: P (3 hijos) = 0.25

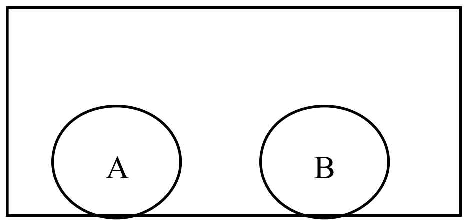
B: P (4 hijos) = 0.20

C: P (5 o más) = 0.15

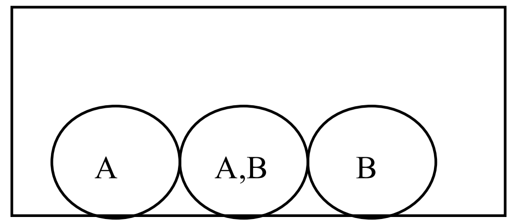
luego: P (A ó B ó C) = 0.25 + 0.20 + 0.15 = 0.60

Si A y B no son mutuamente excluyentes entonces la probabilidad de ocurrencia de A ó B es la probabilidad de que ocurra A más la

probabilidad de que ocurra B menos la probabilidad de que ambos ocurran conjuntamente, simbólicamente:
P(A ó B) = P (A) + P (B) - P (AB)



(1)DIAGRAMA DE VENN ILUSTRANDO 2 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES



(2)DIAGRAMA DE VENN PARA DOS EVENTOS QUE NO SON MUTUAMENTE EXCLUYENTES.

La sustracción de (A,B) es para corregir el traslape o intersección que se presenta de A y B cuando no son eventos mutuamente excluyentes. Cuando son excluyentes los eventos, A,B = 0, significando que no existe el área (A,B) (en el diagrama 1).

IV.3.3.4 EJERCICIOS SOBRE EVENTOS INDEPENDIENTES

Ejemplo 1:Cuando dos o más eventos ocurren en forma secuenciada o separados en el tiempo ó espacio, tales como el lanzamiento de 2 monedas 2 veces, se habla de eventos independientes.

A y B son eventos independientes dentro de un conjunto de eventos si la ocurrencia de uno no afecta la del otro. La probabilidad de que ocurran ambos es P (A y B) = P (A) * P (B).

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de obtener dos ases en dos dados en una sola tirada? digamos que A: P (de as en el primer dado = 1/6) y que B: sea la P (de as en el segundo dado) = 1/6)

P (A y B) = 1/6 * 1/6 = 1/36

Son independientes porque un resultado no afecta la ocurrencia del otro.

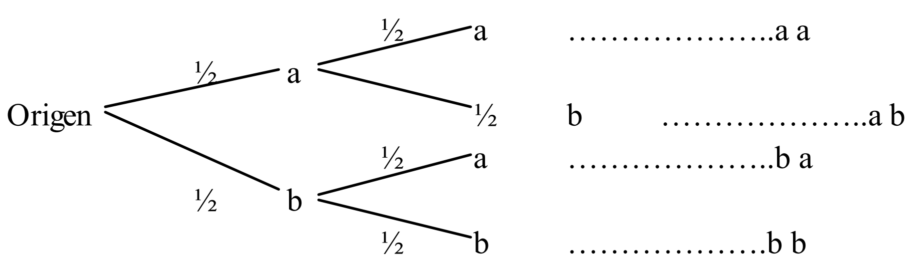
Ejemplo 2:Dos lanzamientos de una moneda son eventos independientes, luego la probabilidad de dos águilas en dos lanzamientos sucesivos de una moneda es 1/4; porque la probabilidad P (A y B) = 1/2 * 1/2 = 1/4; ya que como se recordará P (A y B) = P (A) * P (B).

Por otra parte, es interesante recordar que así como el diagrama de Venn sirve para ilustrar los eventos posibles de un experimento, los diagramas de árbol sirven para ilustrar los resultados posibles de eventos sucesivos o múltiples.

En el caso del lanzamiento de una moneda dos veces el diagrama de árbol será:

a = ÁGUILA   b = SOL

Primer lanzamiento   Segundo lanzamiento   Resultados



¿Cuál es la probabilidad de obtener a y luego b ?

P(A y B) = 1/2 * 1/2 = 1/4

Ejemplo 3: **EVENTOS DEPENDIENTES**

En la vida real la mayoría de los eventos no son independientes, sino que existen interacciones entre ellos. Si son dependientes, el concepto de probabilidad condicionada se usa para determinar la probabilidad de una secuencia particular de eventos, el símbolo P (B\A) significa la probabilidad de B dado que A ocurrió previamentes, esto es:

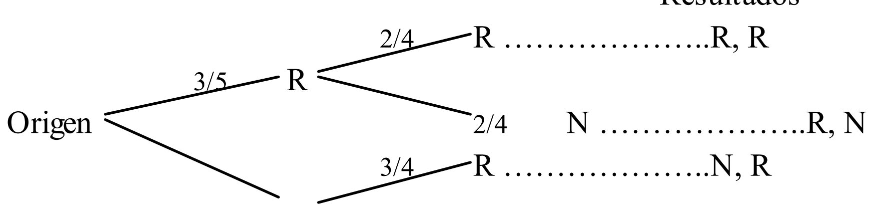
P (A y B) = P (A) * P (B\A)

Ejemplo:

Una caja tiene 3 bolas rojas (R) y 2 negras (N) luego la probabilidad de R = 3/5; P (N) = 2/5 porque son cinco bolas en total.

Si queremos usar el diagrama de árbol este será:

Resultados



$$2/5 \quad N \xrightarrow{1/4} N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N, N$$

Si en la primera selección obtenemos una bola roja. Obtenga la probabilidad de que en una segunda selección la bola sea negra, sin reemplazo.

P (N\R) = 2/4

P (R y N) = P(R) P(N\R) = $\frac{3}{5} * \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

Por lo tanto

P(RyN)= $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Ejemplo 4:

Si la verificación de un evento afecta la probabilidad de ocurrencia de otro, el segundo es un evento dependiente del primero.

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un as en una segunda selección de cartas de una baraja americana?. Ello dependerá de que hayamos escogido un as en la primera selección.

A : P (As en la primera selección es) = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

B : P (As en la segunda selección es) = $\frac{3}{51}$

P (A y B) = $\frac{4}{52} * \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = 0.0045$

Ejemplo 5:*Aplicación de eventos dependientes en economía*

El cálculo de la probabilidad de un evento dependiente, con un ejemplo económico aplicando el teorema de Bayes o Inferencia Bayesiana, tomado del libro del Prof. J. Kazmier e intitulado "STATISTICAL ANALYSIS FOR BUSINESS AND ECONOMICS de MC Graw Hill, 1967".

Suponga que la probabilidad de que nuestro principal competidor decida diversificar su producto es 0.60, y si lo hace hay una probabilidad de 0.80 que construirá una nueva planta.

Así mismo si decide no diversificarse (0.40), hay la probabilidad de 0.40 de que construirá una nueva planta.

Si D = Probabilidad de diversificarse
Si ~D = Probabilidad de no diversificarse
Si B = Probabilidad de construir una nueva planta
Si ~B = Probabilidad de no construir una nueva planta.

			B	$P(D)\,P(B\backslash D) = 0.48$
		0.80		
0.60	D			
		0.20		
			~B	$P(D)\,P(\sim B\backslash D) = 0.12$
			B	$P(\sim D)\,P(B\backslash \sim D) = 0.16$
		0.40		
0.40	~D			
		0.60		
			~B	$P(\sim D)\,P(\sim B\backslash \sim D) = 0.24$

Como puede verse B y ~ B dependen de D y son dependientes, su probabilidad esta condicionada a la ocurrencia de D. Así, la probabilidad total de B:

$P(B) = P(D)\,P(B\backslash D) + P(\sim D)\,P(B\backslash \sim D)$

$P = (.6)(.8) + (.4)(.4) = .48 + 0.16 = 0.64$

SIMILARMENTE

$P(\sim B) = P(D)\,P(\sim B\backslash D) + P(\sim B)\,P(\sim B\backslash \sim D)$

$P = (.60)(.20) + (.4)(.6) = .12 + .24 = .36$

Así $P(B \text{ ó } \sim B) = (0.64) + (0.36) = 1.0$

Ahora bien, si vemos que esta construyendo una nueva planta.

¿Esto indica que ha decidido diversificarse?. No, porque la decisión de construir también pudo haberse tomado con la decisión de no diversificarse.

Así, si deseamos determinar la probabilidad de que nuestro competidor se diversifique dado que esta construyendo una nueva planta, usamos el teorema de Bayes, que representa el análisis de la probabilidad condicional cuando se hace una inferencia hacia atrás, es decir se usa en eventos dependientes y de probabilidad condicional, para calcular la probabilidad condicional que permiten hacer inferencias hacia atrás.

De acuerdo con los símbolos usados, para obtener D, se parte de B, llamada probabilidad posterior que sirve para obtener la probabilidad anterior de D, expresada así.

$$P(D \setminus B) = \frac{P(D)\,P(B \setminus D)}{P(B)}$$

P (B) se determina considerando D y ~ D, es decir, cuando se diversifica y cuando no se diversifica. Del diagrama de árbol vemos que:

P(B) = P(D) P(B\D) + P(~ D) P(B\~D) = (0.6)(0.8) + (0.4)(0.4) = 0.64

Luego $\boldsymbol{P(D \setminus B)} = \dfrac{\boldsymbol{P(D)P(B \setminus D)}}{\boldsymbol{P(D)P(B \setminus D) + P(\sim D)P(B \setminus \sim D)}} = \dfrac{(0.6)(0.8)}{(0.64)} = \dfrac{0.48}{0.64} = 0.75$

Comentarios: Antes de tener la información adicional sobre la construcción de la planta, la probabilidad de diversificarse era de 0.6, que en el lenguaje de la inferencia Bayesiana, se denomina probabilidad apriori. Considerando la información adicional: que nuestro competidor construirá la nueva planta, la probabilidad de que se diversifique ahora es 0.75 y se denomina probabilidad posterior.

La probabilidad posterior puede ser mayor o menor que la apriori. V.gr., si el competidor decidió no construir la nueva planta, la nueva probabilidad posterior de diversificarse seria menor que 0.60.

Demostración :

$$\boldsymbol{P(D \setminus \sim B)} = \frac{\boldsymbol{P(D)P(B \setminus D)}}{\boldsymbol{P(D)P(\sim B \setminus \sim D) + P(\sim D)P(\sim B \setminus \sim D)}} = \frac{(0.6)(0.2)}{(0.6)(0.2) + (0.4)(0.6)} = \frac{0.12}{0.36} = 0.33$$

Igualmente

$$\boldsymbol{P(\sim D \setminus B)} = \frac{\boldsymbol{P(\sim D)P(B \setminus \sim D)}}{\boldsymbol{P(\sim D)P(B \setminus \sim D) + P(D)P(B \setminus D)}} = \frac{(0.16)}{(0.64)} = 025$$

0.16+0.48=0.64

$$P(\sim D \setminus \sim B) = \frac{P(\sim D)\,P(\sim B \setminus \sim D)}{P(D)P(\sim B \setminus D) + P(\sim D)P(\sim B \setminus \sim D)} = \frac{(0.24)}{(0.36)} = 067$$

0.24+0.12=0.36

IV.3.6 PRÁCTICA VI

NOMBRE____ GRUPO_____

PROBLEMA 1.- Al mercado concurren tres empresas con los productos A, B, C,. El número de unidades de A es de 20, el de B es de 35 y el de C es de 45. Una unidad será elegida al azar entre todas ellas.

1. ¿Cuál es el conjunto de eventos elementales o espacio muestral?
2. ¿Cuál es la probabilidad asociada a cada evento elemental?
3. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una unidad del producto A?
4. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una unidad del producto B?
5. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una unidad del producto C?
6. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una unidad sea del producto A o B?
7. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una unidad sea del producto B o C?
8. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una unidad sea del producto A o C?

PROBELMA II.- En una localidad de 10,000 compradores las opiniones respecto a dos productos X y Z se manifiestan de la siguiente manera:

1,000 son favorables a ambos.

2,000 a favor de X y en contra de Z.

1,000 en contra de ambos.

4,000 a favor de X y no tienen opinión sobre Z.

1,000 en contra de Z y no tiene opinión respecto a X.

1,000 no tienen opinión respecto a ambos.

Si se elige al azar un comprador, ¿Cuál es la probabilidad de que?:

1. Opinen a favor de X.
2. Opinen en contra de X.
3. No tiene opinión respecto a X.

PROBLEMA III.- Dentro de una rama industrial se encuentran 15 empresas divididas en tres grupos: grupo México con 6, grupo Puebla con 4 y grupo Querétaro con cinco. Si denotamos por M, N, y Q como los eventos de exportar una misma mercancía, determinar las probabilidades siguientes:

1. Sea una empresa del grupo México la que exporte.

2. Sea una del grupo Puebla la que exporte.
3. Sea una del grupo Querétaro la que exporte.
4. Que no sea del grupo México.
5. Que sea del grupo México o Puebla.

PROBLEMA IV.- En una Facultad de Ciudad Universitaria asisten 2,500 estudiantes con las siguientes características:

1,000 son del sexo femenino.

1,200 pesan 58 kilos o más.

De las mujeres 700 miden sobre 1.58.

De los hombres 1,300 miden sobre 1.65.

De los 2,500 uno se elige al azar:

1. Determinar el conjunto de eventos elementales.
2. Cuál es la probabilidad de elegir un estudiante varón.
3. Cuál es la probabilidad de elegir un estudiante que pese menos de 58 kilos.
4. Cuál es la probabilidad de que habiendo elegido a un estudiante varón, este mida sobre 1.65 metros.

V. DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS (6 y 7)

Este tipo de distribuciones son muy importantes por que una vez conocido el alcance de cada una de ellas, ampliamos nuestra capacidad de análisis, ya que a partir del conocimiento de sus supuestos teóricos y de la destreza que desarrollemos para saber aplicarlos o adaptarlos a fenómenos económicos específicos, podemos hacer estimaciones de parámetros, probar hipótesis de trabajo, calcular y utilizar tamaños de muestras para inferir las características de la población de donde las sacamos, sin tener que estudiarla toda, como sería a través de un censo.

Par saber como se generan, empezaremos haciendo el símil con una distribución o arreglo de datos en lo que hemos dado en llamar una distribución de frecuencias, que es una lista de todos los resultados posibles con la asociación de una frecuencia observada por cada resultado.

Similarmente, una distribución probabilística también es una lista de todos los resultados posibles, pero en lugar de la frecuencia observada, se indica la probabilidad asociada con cada uno de los resultados.

Así, si tres monedas se lanzan al aire y se registran los resultados, el número posible de águilas en un lanzamiento puede ser: 0, 1, 2, 3.

Aún cuando hay cuatro resultados posibles sólo uno ocurre en el lanzamiento de tres monedas.

Suponiendo que realizamos o repetimos el experimento de lanzar diez veces las tres monedas y se registra el número de veces que cae 0, 1, 2, 3. la tabla que resulta es una distribución de frecuencias.

No de águilas	Frecuencia Observada
0	2
1	4
2	4
3	0

Si el experimento se repite, en cada ocasión se obtienen resultados diferentes. Para evitar lo anterior y no conducirnos casuísticamente, es decir, estar tabulando las frecuencias de ocurrencia de cada resultado posible, en forma aislada para luego llegar a conclusiones circunstanciales o coyunturales en el estudio de un fenómeno económico, es preferible tratar de generalizar aplicando procedimientos estándar de aceptación general en el análisis de los mismos, cuyos resultados sean creíbles puesto que se maneja una metodología aceptada por la mayoría. Para ello qué mejor referencia que el enfoque clásico o teórico, con el que podemos determinar e indicar la probabilidad de cada producto: 0.1.2.3, , ya que en su lugar determinamos o indicamos la probabilidad de cada producto, situación que nos evita que cambie la distribución, es decir, siempre será 1/8 para cero aguilas o tres soles; 3/8 para un águila y dos soles; 3/8 para dos águilas y un sol y 1/8 para tres águilas.

Reiterando, mientras que una distribución de frecuencias lista todos los resultados posibles con su frecuencia asociada indicando el número de veces que ocurre cada resultado, la distribución probabilística también lista todos los resultados posibles con su probabilidad asociada de ocurrencia, así: partiendo de la definición clásica la cual establece que p = 1/2 = q; donde p = Probabilidad que caiga "águila" y q = Probabilidad de que no sea "águila"; si lanzamos tres monedas a la vez y registramos el número de águilas, generamos una **<u>distribución</u> <u>probabilística</u>** con ocho resultados posibles, que agrupados dan:

No de águilas	Probabilidad
0	1 ÷ 8
1	3 ÷ 8
2	3 ÷ 8
3	1 ÷ 8

Uno de los primeros beneficios de estos cálculos es que dada una distribución probabilística, se puede desarrollar una distribución de frecuencias esperadas multiplicando el valor de cada una de las probabilidades por el número total de veces que se repita el experimento.

No de águilas	Frecuencia esperada en el lanzamiento de 3 monedas 24 veces
0	24 * 1 ÷ 8 = 3
1	24 * 3 ÷ 8 = 9
2	24 * 3 ÷ 8 = 9
3	24 * 1 ÷ 8 = 3

Raras veces la distribución de frecuencias observadas coinciden con la de las esperadas, que se convierten en la mejor estimación de las primeras si el experimento se realiza muchas veces. Luego una distribución de frecuencias esperadas es una distribución probabilística.

SU NATURALEZA Y FORMA DE GENERARLAS

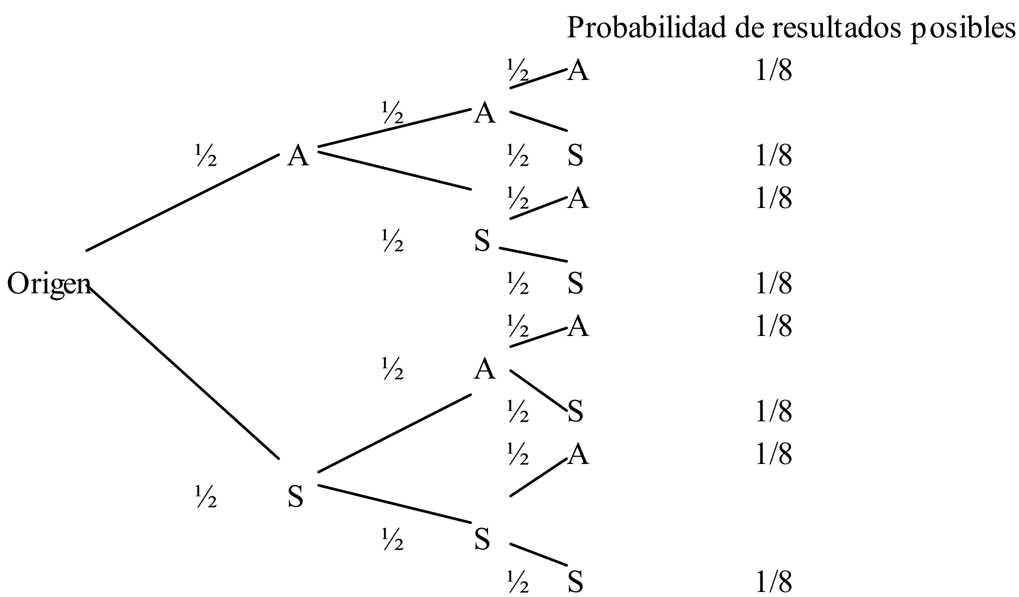
Pueden ser discretas y continuas. Aún cuando existen diferentes maneras de generar una distribución de frecuencias esperadas, dos son usadas extensamente en la inferencia estadística: binomial y normal, partiendo de la definición clásica de probabilidad.

V.1 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL[12]

Es una familia de distribuciones con ciertas características en común. Una de sus principales características es que maneja datos discretos y no continuos. Se llama binomial porque se genera de la expansión binomial de **q+p**. Puede obtenerse por medio de:

a) Diagrama de árbol.
b) La expansión binomial **q + p.**

Partiendo del Diagrama de árbol, la distribución binomial gráficamente será :



Agrupando los resultados anteriores en torno a una distribución probabilistica tendremos :

No de águilas	Probabilidad
0	1 ÷ 8
1	3 ÷ 8

2	3	÷	8
3	1	÷	8

Para construir el diagrama de árbol se supone que los eventos son mutuamente excluyentes e independientes, lo cual quedo demostrado en la introducción a la probabilidad.

Como queda indicado la distribución binomial también puede obtenerse de la expansión de **(q + p)**.

Para ello supongamos que una moneda se lanza al aire dos veces y nos interesa obtener la probabilidad de que caigan "águilas". Los resultados posibles son 0, 1, 2 "águilas"; así mismo en el caso de una moneda no deforme, en cada lanzamiento la probabilidad de obtener águila (p) es 0.5 y la de sol es también 0.5 = q ; tal que **q + p** = 0.5 + 0.5 = 1. Luego la distribución binomial se obtiene de $\mathbf{(q+p)^n}$ donde n = 2 lanzamientos de la moneda. Así, con x representando águilas.

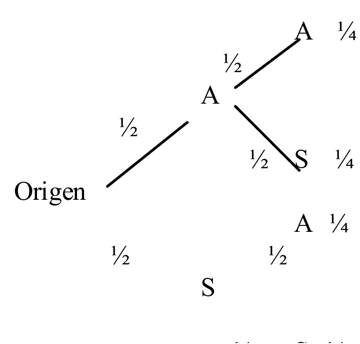
X	P(X)
0	0.25
1	0.50
2	0.25
	1.00

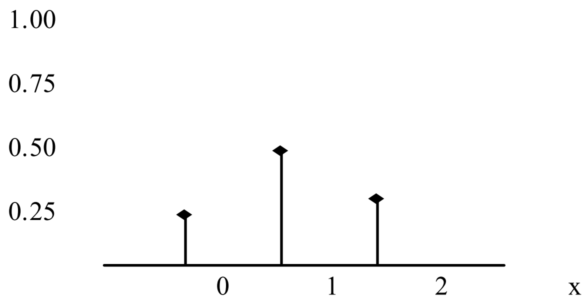
$(0.5+0.5)^2 = (0.5)^2 + 2(0.5)(0.5) + (0.5)^2$
$= 0.25 + 0.50 + 0.25 = 1.00$

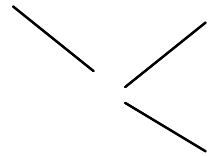
P (0) = 0.25
P (1) = 0.50
P (2) = 0.25

Esto es una distribución binomial. Es probabilística porque muestra cada resultado posible con su probabilidad de ocurrencia asociada.

Gráficamente.







Recordando que la probabilidad en su acepción objetiva se refiere a un proceso repetitivo, el cual genera productos que no son idénticos ni predecibles individualmente, pero que pueden describirse en términos de frecuencias relativas, estos procesos son llamados **estadísticos ó aleatorios**, y los resultados individuales se llaman eventos.

Un proceso estocásticos puede ser el lanzamiento de una moneda, el proceso de fabricación de ladrillos o la selección al azar de personas y el registro de su peso, estatura, ingreso o sexo.

En estos caso el proceso estocástico es el lanzamiento de la moneda, la fabricación de ladrillos ó el registro de las características de las personas, y lo que se observa (cara de la moneda, el peso de los ladrillos, el ingreso de las personas, etc.) es llamado variables estocástica, aleatoria o al azar.

De esta manera una distribución de probabilidad es una lista de todos los eventos (o valores de la variable aleatoria) que resulta de un proceso estocástico, y la probabilidad asociada de ocurrencia de cada uno de ellos.

Ahora bien, si p: probabilidad de éxito de x y q: probabilidad de fracaso de x, los valores de p y q pueden variar pero su suma será $\mathbf{q + p = 1}$.

El número de eventos en la secuencia o número de repeticiones se indica con el exponente del binomio. Así $\mathbf{(q + p)}$ es la expansión binomial que genera una distribución de probabilidad cuando se lanza una moneda.

Así $\mathbf{(q + p)^3}$ es la expansión binomial que genera una distribución de probabilidad cuando se lanzan tres monedas, el término binomial a expandir será:

$$\mathbf{(q + p)^3 = q^3+3pq^2+3p^2q+p^3}$$

Sustituyendo los valores de q y p, donde q = 1/2 = p; tendremos:

$$\mathbf{(q + p)^3} = (1/2)^3 + 3\,(1/2)\,(1/2)^2 + 3\,(1/2)^2\,(1/2) + (1/2)^3 =$$
$$= 1/8+3/8+3/8+1/8$$

Estos resultados son iguales a los obtenidos con el diagrama de árbol y corresponden a la probabilidad de obtener 0, 1, 2 ó 3 águilas en el lanzamiento de 3 monedas.

El primer término de la expansión indica la probabilidad de obtener cero águilas y tres soles, el segundo expresa la probabilidad de obtener una águila y dos soles y así sucesivamente. Luego los exponentes incluidos en cada término de la expansión binomial son útiles en la interpretación del significado de cada uno de los términos.

Por otro lado los coeficientes de cada término indican el número de formas en que se pueden obtener los resultados.

En resumen, la distribución binomial puede generarse de dos maneras:
1º.- Por el diagrama del árbol.
2º.- Por la expansión del binomio $\mathbf{(q + p)^n}$

V.1.1 LA MEDIA ARITMÉTICA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Se calculan con el procedimiento usual, solo que se usan probabilidades en lugar de frecuencias. En el caso de la media:

$$\mu = \frac{\sum Xp(X)}{\sum p(X)} \quad \text{en lugar de} \quad \bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

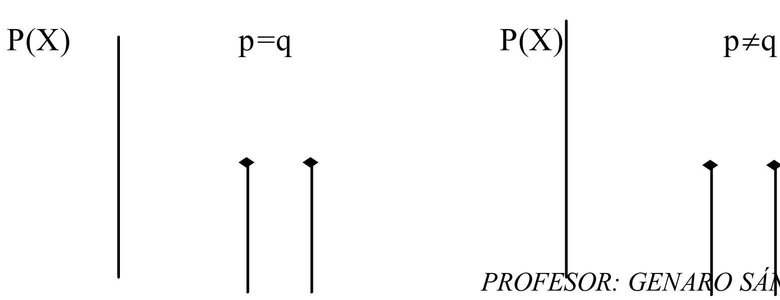
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\mu)^2 p(x)}{\sum p(x)}} \quad \text{en lugar de} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}}$$

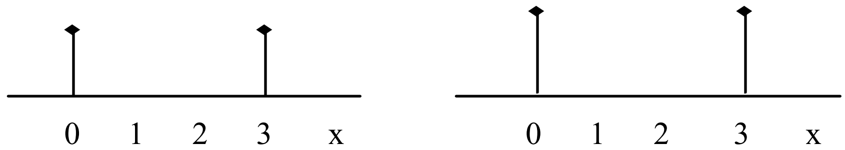
Como la suma de las probabilidades es igual a 1 los denominadores de las fórmulas se eliminan y queda :

$$\mu = \sum xp(x)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum (x-\mu)^2 p(x)}$$

La distribución binomial es simétrica cuando p = q = 1/2; y asimétrica cuando p es diferente de q.
Gráficamente:





Ejemplo 1

Si el 50% de los hombres empleados en la Cía. Nestle son casados y si tomamos una muestra aleatoria de dos hombres, ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga 2, 1 ó 0 hombres casados?

$p = 1/2 = q$

p : probabilidad de que los hombres sean casados.

q : probabilidad de que no lo sean.

c = casado.

s = soltero.

			Resultados posibles	Probabilidad de cada resultado
Origen	½ c	½ c	c c	¼ = 0.25
		½ s	c s	¼ = 0.25
	½ s	½ c	s c	¼ = 0.25
		½ s	s s	¼ = 0.25
				1.00

Agrupando los resultados en una tabla de frecuencias (probabilidades) relativas, tenemos:

X	P(X)
0	0.25
1	0.50
2	0.25
	1.00

Este mismo resultado puede obtenerse con la expansión del binomio $\mathbf{(q + p)^2}$

$$\mathbf{(q+p)^2 = q^2+2pq+p^2}$$
$$= (1/2)^2+2(1/2)(1/2)+(1/2)^2$$
$$= 1/4+2(1/4)+1/4$$
$$= .25+.50+.25=1$$

CALCULO DE LA MEDIA ARITMÉTICA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL .

X	P(X)	XP(X)	x-μ	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2P(X)$
0	0.25	0.00	-1.00	1.00	0.25
1	0.50	0.50	0.00	0.00	0.00
2	0.25	0.50	1.00	1.00	0.25
	1.00	1.00	0.00		0.50

Se calcula con el procedimiento usual, solo que se usan probabilidades en lugar de frecuencias. En el caso de la media, μ:

$\mu = \dfrac{\sum xp(x)}{\sum p(x)}$ en lugar de $\bar{X} = \dfrac{\sum xf}{\sum f}$

μ=1

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x-\mu)^2 p(x)}{\sum p(x)}} = \sqrt{0.50} = 0.71$ en lugar de $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}}$

Estos resultados μ y σ se obtiene más fácilmente con:

μ = n p ; y $\sigma = \sqrt{npq}$

donde n = número de veces que se realiza el experimento o tamaño de la muestra:

Si p = 1/2 y n = 2 ; μ = 2(1/2) = 1

$\sigma = \sqrt{2(1/2)(1/2)} = 0.71$

V.1.1.2 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL COMO LIMITE DE LA BINOMIAL

Hemos visto que la distribución binomial es discreta porque sus términos son enteros. El polígono de frecuencias no tiene otro significado que el de ilustrar su simetría o asimetría por lo que no se pueden interpolar sus puntos al no ser fraccionables sus valores.

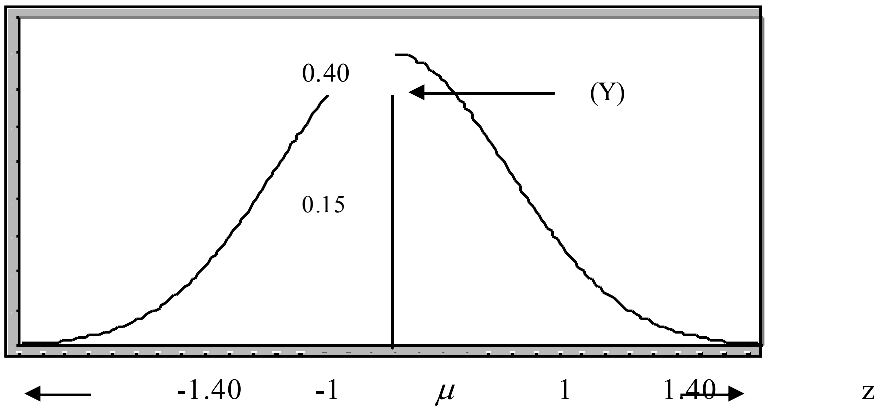
Sin embargo cuando n crece también lo hace el número de resultados posibles, tal que el polígono de frecuencias se aproxima a una curva suave y acampanada que corresponde a la distribución normal. La distribución normal fue derivada de la estandarización de la binomial usando:

la variable $Z = \dfrac{(x-\mu)}{\sigma}$ que es igual a $Z = \dfrac{(x-np)}{\sqrt{npq}}$ y con n creciendo sin límite.

X	P(X)	x-μ	$Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$	Área bajo la curva	(y) Ordenada
0	0.25	-1.00	-1.40	-0.41924	0.14973
1	0.50	0.00	0.00	0	0.39894

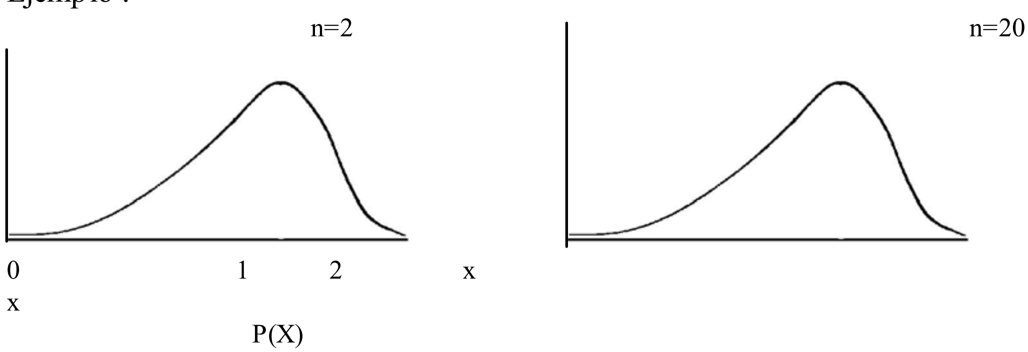
2	0.25	1.00	1.40	0.41924	0.14973

$\mu = n\,p = 1$; $\sigma = 0.71$



La normal es simétrica aún cuando p es diferente de **q** tal que la binomial con **p** diferente de **q** pero con n creciendo tiende a ser normal o simétrica.

Ejemplo :



La distribución binomial también se le llama de Bernoulli, porque fue quien la desarrolló.

V.2 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

A la distribución de probabilidad determinada a partir de una **distribución finita** se le llama distribución hipergeómetrica,.

Para su cálculo se parte de las fórmulas de la binomial obtenida con la formula de las **combinaciones**:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n C_r$$

En este caso tenemos que:

$$\sigma = \sqrt{npq} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Conociéndose $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ con el nombre del multiplicador ó corrector finito, el cual es útil porque ayuda a mejorar el valor de σ.

Ejemplo 1.-

N = Universo = 200 automóviles

n_1 = Automóviles americanos = 120

n_2 = Automóviles europeos = 80

r = Tamaño de la muestra = 20

¿Cuál es la probabilidad de que x = 8 sean americanos?. Recordando que habrá $\begin{bmatrix} n_1 \\ x \end{bmatrix}$ maneras diferentes de obtener 8 automóviles americanos, entonces r - x: será el número de automóviles europeos tal que $\begin{bmatrix} n_2 \\ r-x \end{bmatrix}$ maneras diferentes de obtener 12 automóviles europeos.

Luego la probabilidad de obtener 8 automóviles americanos y 12 europeos será:

$$\frac{\begin{bmatrix} n_1 \\ x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_2 \\ r-x \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 120 \\ 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80 \\ 12 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 200 \\ 20 \end{bmatrix}}$$

La distribución hipergeométrica se genera para todos los éxitos (X).

X	P (X)
Autos Americanos	

0	.	$P(x=0)=\dfrac{\begin{bmatrix}120\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80\\20\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}200\\20\end{bmatrix}}$
1	.	
2	.	
3	.	
.		.
.		.
.		.
8	.	$P(x=8)=\dfrac{\begin{bmatrix}120\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80\\12\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}200\\20\end{bmatrix}}$
.		.
.		.
20	.	$P(x=20)=\dfrac{\begin{bmatrix}120\\20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}200\\20\end{bmatrix}}$
Suma		1.00

Ejemplo 2
N = 10 personas
n_1 = 6 hombres
n_2 = 4 mujeres
r = 5
¿Cuál es la probabilidad de obtener hombres en una muestra de 5?

Número de hombres (X)	Combinaciones	P(X)
0	$\dfrac{\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}}=\dfrac{1}{252}=$	0.0000

1 $\dfrac{\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}} = \dfrac{6(1)}{252} = \dfrac{6}{252} =$ 0.0238

2 $\dfrac{\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}} = \dfrac{15(4)}{252} = \dfrac{60}{252} =$ 0.2380

3 $\dfrac{\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}} = \dfrac{20(6)}{252} = \dfrac{120}{252} =$ 0.4761

4 $\dfrac{\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}} = \dfrac{15(4)}{252} = \dfrac{60}{252} =$ 0.2380

5 $\dfrac{\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}} = \dfrac{6(1)}{252} = \dfrac{6}{252} =$ 0.0238

.9757 $\cong$ 1.000

V.2.1 SU MEDIA ARITMÉTICA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR

Calcular la μ y la σ de la hipergeométrica con $\mu = np = \Sigma\ XP(X)$ y

$$\sigma = \sqrt{npq} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\sum (x-\mu)^2\, p(x)}$$

X	P(X)	XP(X)	x-μ	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2P(X)$
0	0.0000	0.000	-3	9	0.000
1	0.0238	0.024	-2	4	0.096
2	0.2380	0.476	-1	1	0.238
3	0.4761	1.428	0	0	0.000
4	0.2380	0.952	1	1	0.238
5	0.0238	0.120	2	4	0.096
		3.000			0.668

$\mu = \Sigma\ X\ P(X)$

$\mu = 3$

También se obtiene el mismo resultado con :

$\mu = n\ p$

$\mu = 5(0.6) = 3$
ya que p = 0.6 = probabilidad de obtener "hombre" en una selección simple o proporción de hombres en la población.

$$\sigma = \sqrt{\sum (x-\mu)^2 p(x)} = \sqrt{0.668} = 0.81$$

Como en el caso de la media σ también se obtiene de :

$$\sigma = \sqrt{npq} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\sigma = \sqrt{5(0.6)(0.4)} * \sqrt{\frac{10-5}{10-1}} = \sqrt{1.20} * \sqrt{0.55} = 0.81$$

V.3 DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de Poisson también es discreta y forma parte de la familia Bernoulli.

La distribución binomial se aproxima a la normal cuando **n** crece aunque **q** diferente de **p**. Sin embargo cuando p es pequeña la aproximación de la binomial a la normal no es satisfactoria, por lo que la distribución de Poisson deberá usarse como una aproximación.

En este caso la probabilidad de **x** eventos en **n** pruebas, cuando **p** es la probabilidad de que suceda en una prueba simple viene dada por:

$$P(X) = e^{-np} * \frac{(np)^x}{X!}$$

Si **np=m** entonces $P(X) = e^{-m} * \frac{(m)^x}{X!}$

e es la base de los logaritmos naturales = 2.71828

Como la binomial, la media de la distribución de Poisson es **np** = **m**, pero su varianza es **<u>m</u>** por que si:

σ^2 = n p q y si q ≅ 1, entonces σ^2, = n p = m

Ejemplo:

El gimnasio Gumesindo Brown del D.F. pide un aparato de ejercicios a Monterrey; este es enviado con 200 tuercas para ser armado aún cuando sólo requiere 198. Las dos tuercas adicionales son incluidas como reserva para que en caso de que salieran defectuosas algunas se pudieran substituir con las dos de repuesto. Las tuercas son hechas por una máquina automática que produce tuercas defectuosas con una probabilidad de 0.01.

¿Cuál es la probabilidad de que el comprador no tenga suficientes
tuercas para armar el aparato?

p = 0.01

m = n p = 200 (0.01) = 2

n = número total de tuercas = 200

$$P(X) = e^{-m} * \frac{(m)^x}{X!}$$

$e^{-2} = \dfrac{1}{(2.71828)^2}$ = 0.13534 por lo tanto e^{-m} = 0.13534

X	P(X)
0	0.1353 P(0)= 0.13534*$(2)^0$/0! = 0.13534
1	0.2707 P(1)= 0.13534*$(2)^1$/1! = 0.2707
2	0.2767 P(2)= 0.13534*$(2)^2$/2! = <u>0.2707</u>
	0.6767

P(x > 2) = 1.000 - 0.6767
p(x > 2) = 0.3232

V.4 DISTRIBUCIÓN NORMAL[9]

La ecuación para obtener sus ordenadas, dados ciertos valores de X expresados en las abscisas en unidades de desviación estándar, es:

F(x)= 1/ $\sqrt{2\pi\sigma^2} * e^{\left[-1/2\sigma^2(x-\mu)^2\right]}$

donde:

x = cualquier valor de la variable aleatoria continua;

μ = media de la variable aleatoria normal

σ = desviación estándar de la variable aleatoria normal;

$e = 2.71828$ ...base del logaritmo natural

$\pi = 3.1416$,

dándole valores podemos construir la curva normal

Características:

Tiene forma de campana; es simétrica respecto a su media; es asíntota al eje de las x o sea que nunca atraviesa el eje de las x.

El área bajo la curva normal es igual a 1 dado que representa la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles de un experimento.

En la vida real hay distribuciones de datos con medias iguales y desviaciones estándar diferentes o con medias diferentes y desviaciones estándar iguales. Para uniformarlas o reducirlas a un patrón único[18]., hacemos un cambio de variable, que designamos con $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ y llamamos **variable normal estándar**, que tiene $\mu = 0\ y\ \sigma = 1$, demostración:

su promedio será $\overline{Z} = \frac{\sum \frac{x-\mu}{\sigma}}{N}$, como σ es una constante la podemos sacar de la sumatoria $\overline{Z} = \dfrac{\dfrac{1\sum(x-\mu)}{\sigma}}{N}$

la suma de la diferencia $x-\mu=0$, luego

$\overline{Z} = \dfrac{\dfrac{1[0]}{\sigma}}{N}$ así tenemos $\overline{Z} = \dfrac{0}{N} = 0$, lo que queda demostrado

Ahora bien, demostrar que $\sigma_{z} = 1$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - \overline{z}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - 0\right)^2}{N}}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}{N}} = \sqrt{\frac{\sum\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2}{N}}$$

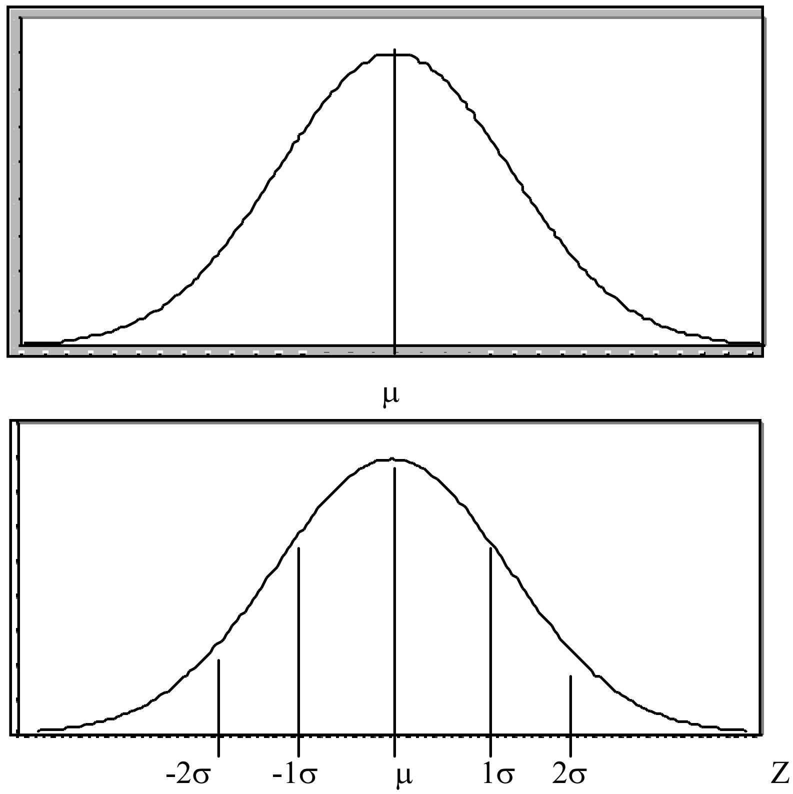
Al ser σ^2 una constante la podemos sacar de la sumatoria

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{\sum(x-\mu)^2}{N}} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{N}}$$

Sabemos que $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum(x-\mu)^2}{N}}$

Luego $\sigma_z = \dfrac{1}{\sigma} * \sigma = \dfrac{\sigma}{\sigma} = 1$

Con ello ya podemos utilizar los valores de z que están el apéndice A, z es una distribución teórica como la binomial, poisson e hipergeométrica, pero con datos continuos que nos ayuda a hacer análisis, como los siguientes, una vez que la hemos trazado.



Ejemplo 1 que ilustra como se construye la curva normal[9]

Supongamos que el salario promedio de 15 000 obreros es de 900 pesos con una desviación estándar de 150 pesos. Construya usted la curva normal con intervalos de 1/2 σ, a partir de μ hasta tres veces sigma.

N = 15,000

μ =\$ 900.00

σ =\$ 150.00

a) Construya la curva normal.

Comentarios: Los valores de las coordenadas para trazarla vienen en la primera (valores de Z) y tercera columna (valores de las **ordenadas para una población infinita, que fueron calculadas con la ecuación descrita al inicio del tema)del Apéndice A;** basta darle valores a z y encontrar sus ordenadas correspondientes para graficar en los cuadrantes I y II (ya que la curva es simétrica) del sistema de ejes cartesianos, un número suficiente de puntos, que al unirlos verificaremos que obtenemos una figura idéntica a una campana.

Sin embargo, cuando la población es finita, como es el caso de este ejemplo, porque conocemos N, y sabiendo que Z es la abscisa de cada uno de los puntos que nos van a permitir construir la curva, **se debe calcular o acotar, su ordenada** correspondiente a partir de los valores presentados en la tercera columna del Apéndice A, con la siguiente fórmula:

$Yx = N / \sigma * f(Z)$

Donde $Z = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ del Apéndice A.

Z ; es el valor de la abscisa o dicho en otras palabras, es el valor expresado en unidades de desviación estándar, de cada uno de los valores originales denotados con los símbolos X_i

Valores originales Xi	Inicio de la conversión a unidades Z Xi-μ	Obtención de Z $Z = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$	Ordenadas para cada valor de Z en una población infinita f(Z)	Determinación de las ordenadas para esta población finita Yx
900	0	0.00	0.39894	39.89
975	75	0.50	0.35207	35.2
1050	150	1.00	0.24197	24.19
1125	225	1.50	0.12952	12.95
1200	300	2.00	0.054	5.4
1275	375	2.50	0.175	1.75
1350	450	3.00	0.0044	0.44

Tabulaciones:

$Yx = 15{,}000 / 150 * f(Z)$

$Yx = 100 (f(Z))$

La columna f(Z) se encuentra en las tablas del apéndices A, buscando primero $Z = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ que lo tenemos ya en las columnas arriba.

Por ejemplo si Z = 0 lo buscamos en la primera columna de las tablas apéndice A, una vez encontrado nos pasamos a buscar f(Z), que estará en la columna tres de las tablas.

EJEMPLO 2

El tiempo de duración de 5 000 pilas para tomar fotografías producidas por una compañía están normalmente distribuidas con media igual a 800 minutos y σ = 40 minutos.

a) Construya gráficamente la curva normal correspondiente con intervalos de 1/2 de σ hasta 3 veces.
b) ¿Cuántas pilas duran entre 780 y 820 minutos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar una pila esta dure cuando menos 750 minutos?

N = 5 000; μ = 800; σ = 40

a)

Xi	Xi-μ	$Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$	f(Z)	Yx
800	0	0.00	0.39894	49.86
820	20	0.50	0.35207	44
840	40	1.00	0.24197	30.24
860	60	1.50	0.12952	16.19
880	80	2.00	0.05399	6.74
900	100	2.50	0.01753	2.19
920	120	3.00	0.00443	0.55

Yx = N / σ * f(Z)

Yx = 5000 / 40 = 125

Yx = 125 * f(Z)

Ahora bien, para contestar el inciso b) tenemos que determinar Z_1 y Z_2 con

Z = Xi - μ / σ

Z_1 = 780 - 800 / 40 = -0.5 unidades de desviación estándar, cuya área es 0.1915

Z_2 = 820 - 800 / 40 = 0.5 unidades de desviación estándar, cuya área es 0.1915

Luego entonces,

P{(X)} = El área de Z_1 = -0.5 a Z_0 + el área de Z_0 a Z_2 = 0.5

P(X) = 0.1915 + 0.1915 =0.383
Para saber cuantas pilas son: 5000(0.383) = 1915 pilas
Aprovechamos para reiterar que la Esperanza matemática E(X) = n p = 100 (0.383) = 38.3%

Para contestar la siguiente pregunta, hacemos:

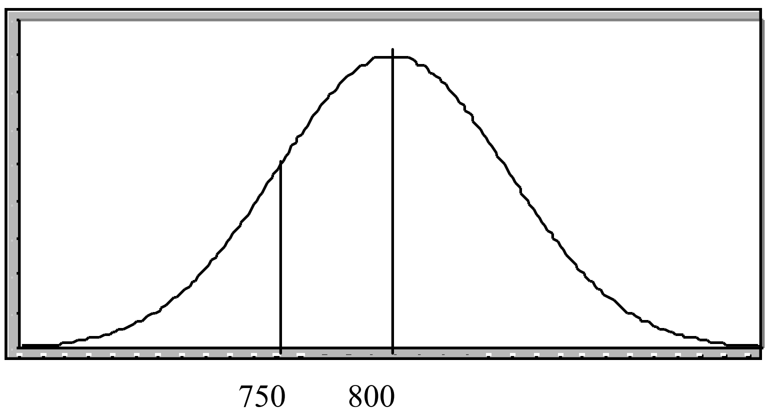
c) Partiendo de $Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$

Sabemos que Z = Xi - μ / σ

Z_1 = 750 - 800 / 40 = -1.25 unidades de desviación estándar

P{(X)}: el área de Z_1= -1.25 luego el área correspondiente será:
de 0.39435.

P(X ≥ 750) = 0.39435 + 0.5000 = 0.89435 ó 89.435 %.



V.5 PRÁCTICA VII

Nombre ____ No de Cta.______________________ Grupo____________

INSTRUCCIONES: Resuelve los problemas siguientes, anotando el desarrollo de las principales operaciones y fórmulas empleadas e interpreta los resultados de cada uno de ellos según su naturaleza.

1.- En una fábrica el 50% de los trabajadores son casados, con una muestra de tres empleados, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) Los tres son casados
b) Uno de ellos sea casado
c) Ninguno sea casado

2.- En una localidad el porcentaje de votantes por el candidato A es de 60% se toma una muestra al azar de 5 personas, ¿cuáles son las probabilidades de que en dicha muestra, voten por el candidato mencionado?

a) Ninguna persona
b) Más de 3 personas
c) Cuando menos 3 personas

3.- El 3% de los tornillos que produce una máquina son defectuosos, ¿cuál es la probabilidad que de 100 tornillos escogidos al azar cuando mucho haya dos defectuosos?

4.- Se ha comprobado que el 2% de una caja que contiene 200 pilas, son defectuosas ¿cuál es la probabilidad que exactamente 3 de ellas sean defectuosas?

5.- La media de los diámetros interiores de una muestra de 200 rondanas, producidas por una máquina es de 0.502 pulgadas y su desviación estándar de 0.008 pulgadas, el propósito para que se destinan estas rondanas permite una tolerancia máxima en el diámetro de 0.496 a 0.508 pulgadas.
De otra manera las rondanas se consideran defectuosas.

a) Si los diámetros se distribuyen normalmente construye la gráfica representativa con intervalos de 1/2 de desviación estándar hasta tres desviaciones estándar.
b) Determinar el tanto porciento de rondanas defectuosas producidas por la máquina.
c) Cuál es la probabilidad de que al seleccionar una arandela, su diámetro sea mayor que 0.510 pulgadas.

6.- El tiempo de duración de 5,000 pilas secas para focos fotográficos producidos por una compañía esta normalmente distribuidos con media igual a 800 minutos y desviación estándar igual a 40 minutos.

a) Construya gráficamente la curva normal correspondiente con intervalos de 1/2 de desviación estándar hasta tres desviaciones estándar.

b) Cuántas pilas duran entre 780 y 820 minutos.

c) Cuál es la probabilidad de que al seleccionar una pila esta dure cuando menos 750 minutos.